Mathématiques

Exercices incontournables

MPSI • PCSI • PTSI

Julien Freslon
polytechnicien, professeur agrégé de mathématiques en classe préparatoire au lycée Dessaignes de Blois.

Jérôme Poineau
polytechnicien, agrégé de mathématiques, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

DUNOD

ISBN 978-2-10-055592-5

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en seize chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et d'un . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent !

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par un . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par un .

Pour finir, signalons que cet ouvrage est conçu pour les étudiants des trois filières MPSI, PCSI et PTSI. Certains exercices, cependant, ne sont accessibles qu'aux élèves de MPSI. D'autres font appel à des connaissances qui dépassent le programme de PTSI (mais pourront être traités par ceux qui suivent l'option mathématique en vue d'entrer en PSI). De tels exercices sont rares et nous signalons ces subtilités dans leur titre.

Pour bien utiliser cet ouvrage :

Cet encadré vous indique un point important

Cet encadré met en avant un piège à éviter

Le stylo-plume vous signale l'étape de la rédaction finale.

Partie 1

Première période

Plan

Fonctions usuelles

1

Exercice 1.1 : Raisonnement par analyse-synthèse

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Il s'agit de questions ouvertes : on demande de trouver les solutions d'un problème sans les donner. Une stratégie consiste à raisonner par analyse-synthèse. C'est un raisonnement en deux étapes :

- Première étape (analyse du problème) : on considère une solution x de l'équation et on essaie, à partir des relations données dans l'énoncé, d'en déduire la forme de x.
- Deuxième étape (synthèse) : l'étape précédente à montré que les solutions sont d'une certaine forme ; il ne reste plus qu'à vérifier, parmi ces solutions potentielles, lesquelles sont bien les solutions du problème.

La nécessité de cette deuxième étape apparaîtra clairement dans la résolution de la première question.

1. Analyse du problème : nous allons élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$. Alors, en élevant au carré : $x(x-3) = 3x-5$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$. D'après le cours de Terminale les réels x vérifiant cette relation sont 1 et 5. Nous avons donc démontré :

si x est solution de l'équation **alors** $x = 1$ ou $x = 5$.

Nous n'avons pas démontré que les solutions sont 1 et 5, mais uniquement qu'elles ne peuvent valoir autre chose. Il reste à vérifier si elle conviennent effectivement : c'est l'objet de l'étape de synthèse.

Synthèse : on remplace successivement x par 5 puis 1 dans l'équation initiale, les calculs étant sans difficulté.

Il est facile de vérifier que 5 est bien solution. En revanche, pour $x = 1$, l'équation n'a pas de sens : elle fait intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Ainsi, 1 n'est pas solution.

Conclusion : 5 est l'unique réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Pourquoi l'étape d'analyse a-t-elle produit une « fausse solution » (dite également *solution parasite*) ? Nous avons élevé deux expressions au carré. Or cette opération n'est pas réversible : s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. En élevant au carré, nous avons en fait résolu l'équation $x(x-3) = 3x - 5$ qui se trouve avoir plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. Analyse du problème : nous allons prendre les logarithmes afin de simplifier les puissances.

Soit x un réel strictement positif tel que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. Alors, en prenant le logarithme : $x^x \ln(x) = x \ln(x^x) = x^2 \ln(x)$.

On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc ajouter une hypothèse pour poursuivre les calculs : $x \neq 1$.

Supposons $x \neq 1$. On a alors $\ln(x) \neq 0$, donc $x^x = x^2$.
En considérant à nouveau les logarithmes il vient : $x \ln(x) = 2\ln(x)$.
Comme on a supposé ici $x \neq 1$, on peut encore simplifier par $\ln(x)$, d'où $x = 2$.
Autrement dit, nous venons de démontrer : si x est un réel strictement positif distinct de 1 vérifiant $x^{(x^x)} = (x^x)^x$, alors $x = 2$.
Ainsi, il y a ou plus deux solutions éventuelles au problème : 1 et 2.

Synthèse : calculs sans astuce, attention cependant à la place des parenthèses.

Il est clair que 1 convient bien. De même, $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ et $(2^2)^2 = 4^2 = 16$, donc 2 convient également.

Conclusion : il existe deux réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$: ce sont 1 et 2.

Si l'on oublie l'étape de synthèse dans la première question, on aboutit à un résultat faux : il y a une solution parasite.

D'autre part, si l'on ne fait pas attention lors de la simplification par $\ln(x)$ dans la deuxième question, on n'obtient que la solution $x = 2$.

Autrement dit, le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions » ou au contraire à en oublier de vraies !

Pour éviter cela, il faut :

- prendre garde, dans le type de raisonnement présenté ici, à ne pas oublier l'étape de synthèse ;
- s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif...) et, au besoin, distinguer des cas comme dans la deuxième question.

Exercice 1.2 : Étude de fonction

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a,b) d'entiers tels que $2 \leqslant a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

1. La démarche pour étudier une fonction est toujours la même :

- déterminer le domaine de définition et de dérivabilité ;
- calculer la dérivée ;
- étudier les limites de la fonction aux bornes de son (ou ses) intervalle(s) de définition ;
- calculer les valeurs de la fonction aux points où la dérivée s'annule ;
- résumer tout ceci dans le tableau de variations.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

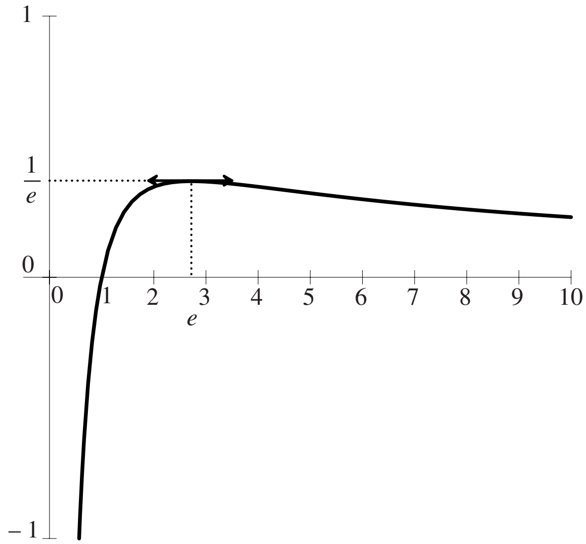
On a de plus, d'après les limites comparées vues en Terminale :

$$\begin{cases} f(1) & = & 0 \\ f(e) & = & e^{-1} \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

puis sa représentation graphique :



2. L'énoncé de la question commence par « en déduire » : il s'agit donc de faire apparaître la fonction f, ce qui suggère d'introduire un logarithme.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Si un couple (a,b) convient on a alors, en prenant les logarithmes :

$$b\ln(a) = a\ln(b).$$

Comme a et b ne sont pas nuls on en déduit

$$\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}, \text{ i.e. } \quad f(a) = f(b).$$

Or, d'après le tableau de variations, f ne peut prendre qu'au plus deux fois une même valeur et, si c'est le cas, elle la prend une fois sur $]1,e[$ et l'autre fois sur $]e,+\infty[$. Il est donc nécessaire que $1 < a < e < b$.
On sait que $e = 2{,}7$ à $0{,}1$ près ; ainsi, a étant entier, il ne peut valoir que 2.

Il reste à trouver un entier $b > e$ (donc $b \geqslant 3$) tel que $f(b) = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Des essais successifs montrent que $b = 4$ convient.
D'autre part, f étant strictement décroissante sur $]e,+\infty[$, elle ne peut prendre plusieurs fois la même valeur : 4 est donc le seul entier b tel que $f(b) = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $b > e$.
La seule solution possible au problème est donc $(a,b) = (2,4)$.

Enfin, nous allons vérifier que ce couple convient bien. Le premier exercice montre qu'une telle vérification n'est pas superflue !

Réciproquement, on a bien $2^4 = 4^2 (= 16)$: le problème possède donc une unique solution, $(a,b) = (2,4)$.

3. De manière analogue nous allons introduire un logarithme.
Pour comparer deux réels strictements positifs il suffit de comparer leurs logarithmes car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Autrement dit, il s'agit de comparer $\ln(e^\pi) = \pi$ et $\ln(\pi^e) = e\ln(\pi)$: c'est là que la fonction f intervient en faisant apparaître les quotients $\frac{1}{e} = \frac{\ln(e)}{e} = f(e)$ et $\frac{\ln(\pi)}{\pi} = f(\pi)$.

On sait que $e < \pi$ donc, comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, $f(e) > f(\pi)$. Autrement dit :

$$\frac{1}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi}.$$

En multipliant par e et π, qui sont strictement positifs, il vient :

$$\pi > e\ln(\pi).$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on obtient enfin :

$$e^\pi > \pi^e.$$

Dans cette dernière question, π ne joue aucun rôle : on aurait pu le remplacer par n'importe quel réel $x > e$.

Exercice 1.3 : Fonctions circulaires réciproques

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $u = \sin(\text{Arctan}(x))$ et $v = \cos(\text{Arctan}(x))$. Déterminer le signe de v puis, à l'aide de $\frac{u}{v}$ et $u^2 + v^2$, déterminer des expressions de u et v en fonction de x sans utiliser de fonctions trigonométriques.

1. Il y a plusieurs manières d'aborder un tel problème :
a) directement par la définition des fonctions circulaires réciproques. Il suffit alors d'essayer d'utiliser les formules de trigonométrie usuelles.

b) utiliser la trigonométrie d'une autre manière : pour montrer que deux réels a et b sont égaux, on peut commencer par montrer que $\sin(a) = \sin(b)$, puis conclure en déterminant un intervalle contenant a et b sur lequel la fonction sinus ne prend pas plusieurs fois la même valeur.

c) par l'étude d'une fonction bien choisie. Cependant, les fonctions Arcsin et Arccos ne sont dérivables que sur $]-1,1[$, alors qu'elles sont définies sur $[-1,1]$, et leur dérivée fait intervenir une racine carrée ; autrement dit, il faut être très prudent sur le domaine d'étude.

Nous allons utiliser successivement ces trois méthodes.

a) Posons $\theta = \text{Arcsin}(x)$ et $\varphi = \text{Arccos}(x)$.
Alors, par définition :

$$\sin(\theta) = x \quad \text{et} \quad \theta \in [-\pi/2,\pi/2]$$

$$\cos(\varphi) = x \quad \text{et} \quad \varphi \in [0,\pi].$$

Pour trouver une relation entre θ et φ on peut utiliser des formules de trigonométrie : on a

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \\ &= \cos(\pi/2 - \theta) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - \theta) &= x \\ &= \cos(\varphi). \end{aligned}$$

De plus, $\pi/2 - \theta \in [0,\pi]$. Or la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc ne prend jamais deux fois la même valeur sur cet intervalle ; on a donc $\pi/2 - \theta = \varphi$, *i.e.* $\theta + \varphi = \pi/2$ ou encore

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Afin de conclure on a dû utiliser les encadrements de θ et φ donnés par la définition des fonctions circulaires réciproques. D'une manière générale on a toujours besoin de ces encadrements pour étudier un problème faisant intervenir ces fonctions.

b) On a, d'après les formules de trigonométrie usuelles et les relations du cours suivantes :

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

la relation :

$$\sin(\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1.$$

Ceci ne suffit pas pour déterminer la valeur de $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$; en effet, le sinus prend une infinité de fois la valeur 1, il faut donc encadrer $\text{Arcsin}(x)$ $+\text{Arccos}(x)$ pour trouver sa valeur.

Par définition,

$$-\pi/2 \leqslant \text{Arcsin}(x) \leqslant \pi/2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \text{Arccos}(x) \leqslant \pi.$$

On a donc

$$-\pi/2 \leqslant \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) \leqslant 3\pi/2.$$

Or, sur l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la fonction sinus ne prend qu'une fois la valeur 1 : c'est au point $\pi/2$. On a donc :

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On notera ici encore une fois l'usage d'un argument d'encadrement.

c) Pour $x \in [-1,1]$ posons $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$.
La fonction f ainsi définie est dérivable sur $]-1,1[$, car Arcsin et Arccos le sont, mais rien ne permet de dire *a priori* qu'elle l'est sur $[-1,1]$; nous sommes donc contraints à ne l'étudier que sur $]-1,1[$.
Pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Arcsin}'(x) + \text{Arccos}'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après les formules du cours ; la fonction f est donc constante sur $]-1,1[$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &= \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie à la main les cas particuliers exclus de l'étude ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(1) &= \text{Arcsin}(1) + \text{Arccos}(1) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(-1) &= \text{Arcsin}(-1) + \text{Arccos}(-1) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\text{pour tout } x \in [-1,1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Dans cette dernière approche, nous avons échappé à l'argument d'encadrement vu dans les deux premières mais il a fallu néanmoins distinguer des cas pour une raison de domaine de dérivabilité.

Avec les fonctions Arcsin et Arccos il y a **toujours** des justifications à apporter : domaine de définition, domaine de dérivabilité ou encadrement des valeurs prises.

2. Laissons-nous guider par l'énoncé. Nous allons même déterminer le signe strict de v : en effet, il est demandé ensuite de diviser par v qui doit donc être distinct de 0.

Pour étudier le signe de v, il suffit de savoir dans quel intervalle Arctan prend ses valeurs... Ce qui fait partie de sa définition.

Pour tout réel x on a, par définition, $\text{Arctan}(x) \in]-\pi/2,\pi/2[$, et donc $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$. Ainsi, $v > 0$, et en particulier $v \neq 0$, donc u/v a un sens.
D'autre part :

$$\frac{u}{v} = \tan(\text{Arctan}(x)) = x.$$

Enfin, pour tout réel θ, $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Avec $\theta = \text{Arctan}(x)$ on obtient

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Comme, par définition, $u = vx$ on obtient, en remplaçant dans l'égalité précédente :

$$(vx)^2 + v^2 = 1$$

soit

$$v^2(1 + x^2) = 1.$$

Comme $1 + x^2 \neq 0$ on en tire

$$v^2 = \frac{1}{1 + x^2}$$

et enfin

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Or $v > 0$, donc

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Enfin, $u = vx$, donc

$$u = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Comme souvent en trigonométrie, nous avons calculé les carrés des expressions demandées. Pour revenir à u et v il était donc nécessaire de déterminer leur signe, sans quoi on ne peut dire mieux que $|v| = \sqrt{v^2}$.

Exercice 1.4 : Arctangente

1. Étant donné un réel strictement positif a on considère la fonction

$$f_a : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right).$$

Étudier cette fonction sur chacun des intervalles $]-\infty, 1/a[$ et $]1/a, +\infty[$.

2. Même question, mais avec $a < 0$.

3. Déduire des deux questions précédentes que, pour tous réels a et b $(a \neq 0)$:

$$\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right) + k\pi$$

$$\text{avec} \begin{cases} k = 0 \text{ si } ab < 1 \\ k = 1 \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ k = -1 \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

Cet exercice présente à nouveau des problèmes d'ensembles de définition mais cette fois avec la fonction Arctan.

1. Il s'agit ici d'une dérivée composée ; rappelons la formule :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

ou encore, en faisant intervenir la variable notée x :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)\operatorname{Arctan}'\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) &= \frac{(1-ax)+a(a+x)}{(1-ax)^2}\\ &= \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}'\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) &= \left(1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right)^{-1}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{1+(ax)^2+a^2+x^2}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{(1+a^2)(1+x^2)}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\},\ f_a'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}'(x).$$

Le raisonnement suivant est **faux** : « f_a et Arctan ont même dérivée donc il existe une constante K telle que $f_a = K + \operatorname{Arctan}$ ». En effet, l'égalité ci-dessus n'est pas valable sur un intervalle mais sur les deux intervalles disjoints $]-\infty,1/a[$ et $]1/a,+\infty[$.

L'énoncé correct est : « si f et g sont deux fonctions dérivables sur un **intervalle** I et si $f'(x) = g'(x)$ pour tout x de I alors $f - g$ est constante ».

Ainsi, nous devons effectuer deux études de fonction : l'une sur l'intervalle $]-\infty,1/a[$ et l'autre sur $]1/a,+\infty[$.

On en déduit que, sur chacun des intervalles $]-\infty,1/a[$ et $]1/a,+\infty[$, $f_a - \arctan$ est une fonction constante : il existe deux réels c et d tels que :

- pour tout $x \in]-\infty,1/a[$, $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + c$;
- pour tout $x \in]1/a,+\infty[$, $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + d$.

Comme nous l'avons rappelé, la fonction f_a n'étant pas définie sur un intervalle les deux constantes c et d n'ont aucune raison d'être égales… Nous verrons d'ailleurs qu'elles ne le sont pas.

Pour les déterminer, on peut choisir des valeurs particulières de x ou considérer les limites à l'infini.

On remarque que, d'après la définition de f_a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \text{Arctan}(-1/a).$$

De plus, comme $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + c$ pour $x < 1/a$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = c - \pi/2$$

et, comme $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + d$ pour $x > 1/a$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = d + \pi/2.$$

On en déduit

$$d + \pi/2 = c - \pi/2$$

soit

$$c = d + \pi.$$

Nous avons ici une première relation entre les deux paramètres à déterminer c et d. Il nous en faut une autre pour les déterminer explicitement, nous allons pour cela considérer la valeur en 0 de la fonction f_a.

Pour cela, il faut savoir si $0 \in]-\infty,1/a[$ ou $0 \in]1/a,+\infty[$: nous allons pour cela enfin nous servir de l'hypothèse de signe sur a.

Comme $a > 0$, on a

$$0 \in]-\infty,1/a[$$

donc

$$f_a(0) = \text{Arctan}(0) + c = c.$$

D'autre part, d'après la définition de f_a, $f_a(0) = \text{Arctan}(a)$, d'où

$$c = \text{Arctan}(a)$$

puis

$$d = \text{Arctan}(a) - \pi.$$

On a alors :

- pour tout réel b tel que $b < 1/a$, $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)$
$= \text{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$;
- pour tout réel b tel que $b > 1/a$, $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)$
$= \text{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

2. Cherchons ce qui change quand on suppose $a < 0$.
Le signe de a n'intervenait que pour le calcul des constantes ; le calcul de la dérivation, lui, est toujours valable.

Dans le cas $a < 0$ on montre de manière analogue qu'il existe deux réels c' et d' tels que :

- pour tout $x \in]-\infty, 1/a[$, $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + c'$;
- pour tout $x \in]1/a, +\infty[$, $f_a(x) = \text{Arctan}(x) + d'$.

De même, en calculant les limites à l'infini, on obtient encore

$$c' = d' + \pi.$$

Pour déterminer c' et d' considérons des valeurs particulières.
Cette fois, $a < 0$ donc $0 \in]1/a, +\infty[$. On a donc

$$f_a(0) = \text{Arctan}(0) + d' = d'.$$

D'autre part, $f_a(0) = \text{arctan}(a)$, d'où

$$d' = \text{Arctan}(a)$$

et enfin

$$c' = \text{Arctan}(a) + \pi.$$

On a alors :

- pour tout réel b tel que $b > 1/a$, $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)$
$= \text{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$;
- pour tout réel b tel que $b < 1/a$, $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)$
$= \text{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$.

3. Distinguons trois cas comme le suggère l'énoncé.

• Si $ab < 1$: on a soit $a > 0$ et $b < 1/a$, soit $a < 0$ et $b > 1/a$. D'après ce qui précède on a dans ces deux cas

$$\mathrm{Arctan}(a) + \mathrm{Arctan}(b) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

• Si $ab > 1$ et $a > 0$: on a $b > 1/a$ et, d'après la question 1,

$$\mathrm{Arctan}(a) + \mathrm{Arctan}(b) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi.$$

• Si $ab > 1$ et $a < 0$: on a $b < 1/a$ et, d'après la question 2,

$$\mathrm{Arctan}(a) + \mathrm{Arctan}(b) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi.$$

Exercice 1.5 : Fonctions hyperboliques réciproques

1. Montrer que, pour tout réel x, $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\mathrm{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Les fonctions hyperboliques s'expriment par définition simplement en fonction de l'exponentielle : il ne s'agit donc pas réellement de « nouvelles » fonctions mais simplement de notations abrégées pour des fonctions qui sont du ressort du programme de Terminale.

Les expressions faisant intervenir $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ peuvent se simplifier en posant $u = e^x$: on a alors $\mathrm{ch}(x) = (u + 1/u)/2$ et $\mathrm{sh}(x) = (u - 1/u)/2$, ce qui permet de se ramener à une expression qui est un quotient de polynômes en u et se prête donc mieux au calcul. Tous les calculs proposés ici seront traités de cette manière.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \mathrm{Argsh}(x)$. Alors $\mathrm{sh}(y) = x$, autrement dit :

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

soit

$$e^y - e^{-y} = 2x.$$

Posons $z = e^y$. Il vient

$$z - z^{-1} = 2x$$

et on a donc, en multipliant par z :

$$z^2 - 2xz - 1 = 0.$$

Le nombre réel z est racine de l'équation du second degré

$$(E) : t^2 - 2xt - 1 = 0$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
Son discriminant est $4(x^2 + 1)$ et ses racines $x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

Nous venons de démontrer que $z = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ou $z = x - \sqrt{x^2 + 1}$. Nous devons donc décider laquelle de ces deux expressions est correcte.

Pour cela, il suffit de trouver un critère pour distinguer ces solutions, par exemple leur signe : si elles sont de signes opposés et qu'on connaît le signe de z, on pourra choisir la bonne solution.

Comme $z = e^y$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $z \in \mathbb{R}_+^*$.
D'autre part on a, pour tout réel x, $x \leqslant |x| < \sqrt{x^2 + 1}$, d'où $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$.
Cette racine de l'équation (E) ne peut pas être z, donc

$$z = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

et enfin

$$y = \ln(z) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

soit encore

$$\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

2. On peut tenter un raisonnement analogue. Si l'obtention d'une équation du second degré se fera sans problème nous verrons que le choix de la bonne racine devra se faire à l'aide d'un critère différent.

De même, pour $x \geqslant 1$, on pose $y = \text{Argch}(x)$, d'où

$$\text{ch}(y) = x$$

et

$$e^y + e^{-y} = 2x.$$

Avec $z = e^y$ on obtient alors

$$z^2 - 2xz + 1 = 0.$$

Le réel z est racine de l'équation

$$(E') : t^2 - 2xt + 1 = 0$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
Son discriminant est $4(x^2 - 1) \geqslant 0$ (car $x \geqslant 1$) et elle a donc pour racines $x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

On se retrouve dans une situation analogue à celle de la question précédente : de deux solutions potentielles, il faut choisir la bonne. Pour cela, il suffit de trouver un critère pour les départager en commençant par chercher un intervalle dans lequel se trouve à coup sûr z.
Le mieux que l'on puisse dire, x étant quelconque dans $[1,+\infty[$, est que $y \geqslant 0$ (par définition de la fonction Argch) et donc que $z \geqslant 1$. Ainsi, ce n'est pas le signe des racines qui est déterminant, mais leur position par rapport à 1.

Ces racines sont positives et leur produit vaut 1 : la plus grande est donc $\geqslant 1$ et la plus petite $\leqslant 1$.
Or $\sqrt{x^2 - 1} \leqslant 0$, d'où $x - \sqrt{x^2 - 1} \leqslant x + \sqrt{x^2 - 1}$.
D'autre part, $y \geqslant 0$ par définition de Argch donc $z \geqslant 1$.
On a donc $z = x + \sqrt{x^2 - 1}$, soit

$$\text{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Encore une fois, nous allons débuter par le même raisonnement mais la conclusion sera différente.

Par un raisonnement analogue, soit $x \in]-1,1[$ et $y = \text{Argth}(x)$. Alors

$$\begin{aligned} x &= \text{th}(y) \\ &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\ &= \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}. \end{aligned}$$

En posant $z = e^y$ il vient

$$x = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

soit $$z^2 - 1 = x(z^2 + 1).$$

En développant et regroupant les termes en z, on obtient $(1-x)z^2 = 1+x$ et, comme $x \neq 1$:

$$z^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

soit
$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

et enfin
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Exercice 1.6 : Calcul de limite par encadrement

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

On pourra préalablement démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1. Pour établir une inégalité de la forme

$$\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$$

on peut introduire la fonction $g - f$ et étudier son signe sur I. Dans les cas qui nous intéressent ici, la dérivée se calcule sans peine, ce qui permet de conclure aisément.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ posons $u(x) = \ln(1+x) - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leqslant 0.$$

La fonction u est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Etant donné que $u(0) = 0$, on a donc $u(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leqslant x.$$

De même, soit la fonction v définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $v(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. v est dérivable et

$$\forall v \in \mathbb{R}_+,\ v'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0.$$

La fonction v est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Etant donné que $v(0) = 0$, on a donc $v(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x).$$

2. Commençons par établir l'égalité donnée en indication. Il s'agit d'une simple démonstration par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons H_n : « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ».

- *Initialisation :* H_1 est clairement vraie, l'égalité se résumant alors à $1 = 1$.
- *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On a donc, en développant :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6).$$

D'autre part, en posant $u_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, on a successivement

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6).\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- *Conclusion :* pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

On peut écrire le produit de manière peut-être plus lisible :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

La première chose à remarquer est que le nombre de facteurs du produit est variable. Il s'agit d'un produit comportant de plus en plus de termes qui sont de plus en plus proches de 1. Dans ce genre de situation, on ne peut pas conclure sur la limite du produit.

À cet effet, rappelons un calcul classique qui montre qu'il faut se méfier des produits ayant un nombre de facteurs variables.

Pour calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, considérons plutôt le logarithme :

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Le second membre est une forme indéterminée qui peut s'écrire comme limite d'un taux d'accroissement; plus précisément,

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}$$

et tend donc vers le nombre dérivé en 0 de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=1$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

En particulier, on voit que la limite n'est pas 1, comme on aurait pu le croire en supposant que le fait que $1+\frac{1}{n}$ tende vers 1 entraîne que sa puissance n-ième tende aussi vers 1. D'une manière générale, aucun théorème classique ne s'applique quand les puissances ou le nombre de facteurs d'un produit est variable.

Nous allons simplifier le produit en considérant son logarithme.

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

Par ailleurs, pour tout entier naturel $k \leqslant n$ on a, d'après la première question :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4} \leqslant \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

En additionnant ces inégalités pour k allant de 1 à n on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

soit, en factorisant les constantes de chaque somme,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Nous voyons bien apparaître la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$ dont la valeur est donné dans l'énoncé. Il se trouve également dans ces inégalités la somme $\sum_{k=1}^{n} k$ qui, elle, peut être calculée sans indication : il s'agit simplement de la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1. D'après la formule classique donnant la valeur d'une telle somme, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons que l'encadrement que l'on obtiendra en remplaçant les sommes par leurs valeurs sera une forme indéterminée classique : il s'agit d'un quotient de fonctions polynomiales de n.

Une telle indétermination se lève simplement en factorisant la plus grand puissance de n dans chaque facteur du numérateur et du dénominateur.

On a successivement :

- $$\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\frac{1}{n^2}\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2}$$
- $$\frac{(1+\frac{1}{n})}{2} - \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{12n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{(1+\frac{1}{n})}{2}$$

Il est désormais clair que les membres de droite et de gauche tendent tous deux vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Il ne reste ensuite qu'à revenir au produit en prenant l'exponentielle.

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

soit enfin :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sqrt{e}.$$

Exercice 1.7 : Études de fonctions et suites adjacentes

Cet exercice est long mais permet de réviser toutes les notions d'analyse de Terminale, à l'exception des intégrales.
On peut directement traiter les questions 4 à 7 en admettant les résultats des trois premières.

On pose $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)-x$, $g(x)=\frac{x^3}{3(1-x^2)}$ et $h(x)=f(x)-g(x)$.

1. Étudier f, g et h et tracer séparément leurs représentations graphiques.

2. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$.

3. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{12n(n+1)}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\frac{n^ne^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $v_n=u_n\exp\left(\frac{1}{12n}\right)$.

4. À l'aide des résultats précédents déterminer le sens de variation de la suite de terme général $\ln(u_n)$.

5. Même question pour la suite de terme général $\ln(v_n)$.

6. Montrer que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

7. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite strictement positive (le calcul explicite de cette limite n'est pas demandé).

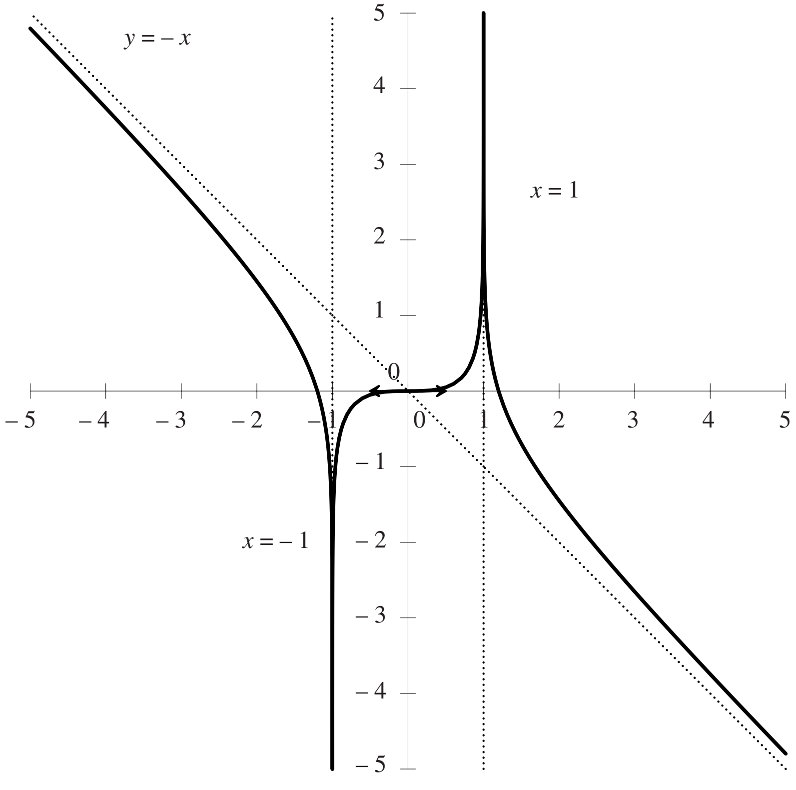
1. Les formules de dérivation classiques donnent :

$$f'(x)=\frac{x^2}{1-x^2},\ g'(x)=\frac{x^2(3-x^2)}{3(1-x^2)^2}\text{ et }h'(x)=-\frac{2x^4}{3(1-x^2)^2}.$$

Le tableau de variations de f prend la forme suivante.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		$+$		‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

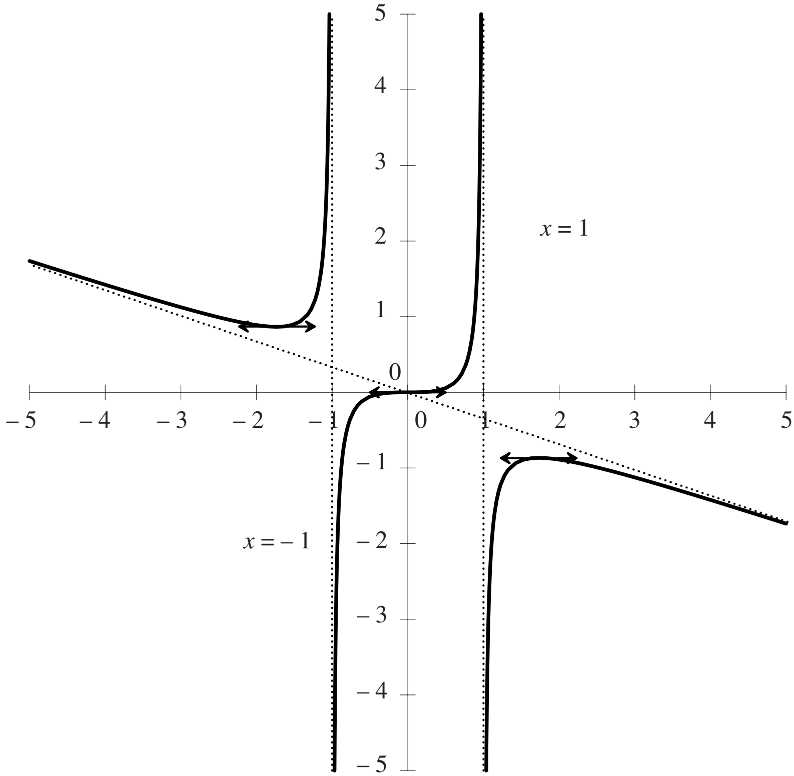
Traçons, à présent, le graphe de la fonction f.



Le tableau de variations de g prend la forme suivante.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

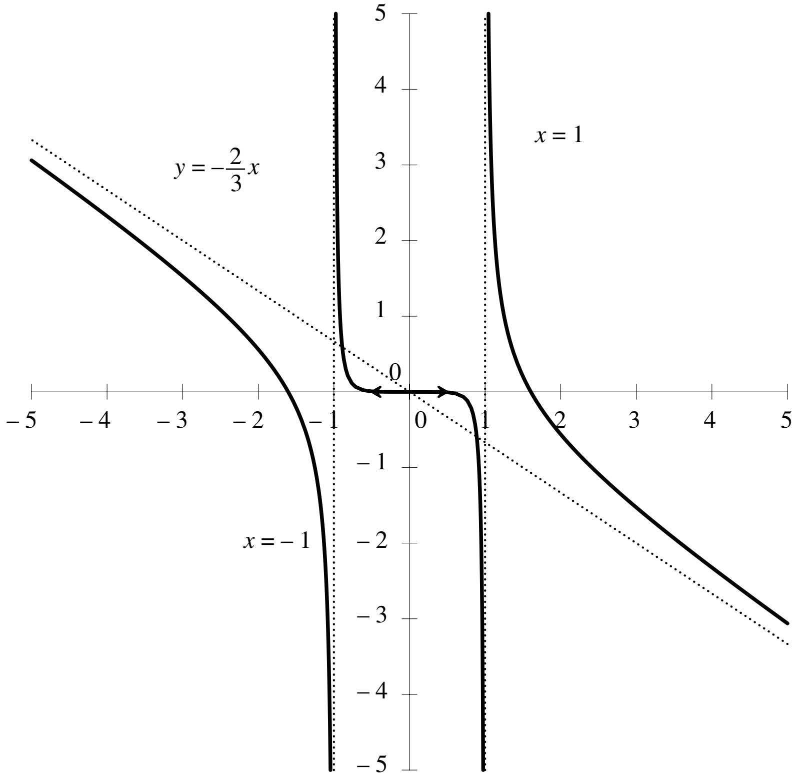
Traçons, à présent, le graphe de la fonction g.



Le tableau de variations de h prend la forme suivante.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖		$-$		‖	$-$	
h	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Traçons, à présent, le graphe de la fonction h.



2. Il faut effectuer deux types de calculs de base : mise au même dénominateur de fractions et utilisation d'un logarithme *via* la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+2}{2n}\right) - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

donc

$$(2n+1)\,f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

3. Idem en plus simple puisqu'il n'y a pas de logarithme.

De la même manière :

$$(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}{3\left(1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\right)} = \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} = \frac{1}{12n(n+1)}$$

car $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$.

4. Le terme u_n est exprimé à l'aide de produits (dont des puissances et des factorielles). Le terme $\ln(u_n)$ peut donc s'écrire comme une somme de termes simples. C'est ce qu'il est conseillé de faire pour y voir plus clair et éviter ainsi les erreurs de calcul dans la suite.

On a

$$\ln(u_n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$$

d'où

$$\ln(u_{n+1}) = \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - (n+1) - \ln((n+1)!).$$

En utilisant les relations

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\ln((n+1)!) = \ln(n!) + \ln(n+1)$$

il vient

$$\ln((n+1)!) = \ln(n!) + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) &= \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\quad -(n+1) - \ln(n!) - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

soit enfin

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\\ &= (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Or f est strictement positive sur $]0,1[$ d'où : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) > 0$. La suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

5. v_n étant défini en fonction de u_n, on obtient une expression de $\ln(v_n)$ en fonction de $\ln(u_n)$ qui a précisément été calculé ci-dessus.

On a, par définition,

$$\ln(v_n) = \ln(u_n) + \frac{1}{12n}$$

donc

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}\\ &= (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{12n(n+1)}\\ &= (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - (2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)h\left(\frac{1}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Or h est strictement négative sur $]0,1[$ donc $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Tout le travail a été fait précédemment : il n'y a plus qu'à vérifier la définition des suites adjacentes.

La suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante. D'autre part,

$$\ln(v_n) = \ln(u_n) + \frac{1}{12n}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(v_n) - \ln(u_n)) = 0$$

Ainsi, par définition, les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

7. Il suffit d'invoquer le théorème des suites adjacentes puis de revenir aux suites initiales en utilisant l'exponentielle.

Les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant adjacentes, elles sont convergentes de même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*.$$

La valeur exacte de cette limite est $(2\pi)^{-1/2}$; elle peut être calculée à l'aide des intégrales de Wallis présentées dans l'exercice **8.1**.

Nombres complexes

2

Exercice 2.1 : Sommes de cosinus

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

2. Même question pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Les sommes d'expressions trigonométriques se traitent naturellement avec les nombres complexes. En effet, pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles. On obtient ainsi une somme d'exponentielles complexes et, le plus souvent, on pourra reconnaître une somme usuelle : termes d'une suite géométrique ou identité remarquable.

1. En suivant la méthode annoncée nous obtenons ici les termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right). \end{aligned}$$

Or $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ donc la somme

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$$

est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^{ix}.

Il y a deux cas à distinguer selon que la raison est égale ou non à 1. En effet, la formule

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

n'est valable que si $q \neq 1$, et pour cause : le second membre n'a pas de sens pour $q = 1$!

Ici, la raison est e^{ix} et est donc égale à 1 si, et seulement si, x est un multiple de 2π, ce qui nous donne la condition pour distinguer les deux cas.

Distinguons deux cas :

• si $e^{ix} = 1$, *i.e.* x est de la forme $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$: tous les termes de la somme valent 1 d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = n + 1.$$

• si $e^{ix} \neq 1$, on a alors d'après la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}.\end{aligned}$$

Pour simplifier un quotient de nombres complexes une méthode générale est de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Cependant, quand les nombres complexes qui interviennent sont des exponentielles, on peut essayer une autre méthode bien plus efficace : la méthode de l'argument moitié.

Expliquons-la brièvement : dans une expression de la forme $1 + e^{i\theta}$, on factorise $e^{i\theta/2}$ et il vient

$$\begin{aligned}1 + e^{i\theta} &= e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) \\ &= 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2).\end{aligned}$$

D'une manière générale, étant donné deux complexes a et b, il peut être intéressant de remarquer que

$$e^a + e^b = e^{(a+b)/2}(e^{(a-b)/2} + e^{-(a-b)/2}).$$

La même factorisation permet de simplifier les différences d'exponentielles.

En factorisant :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} &= \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\,\frac{e^{i(n+1)x/2}-e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= e^{inx/2}\,\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

Enfin, la somme cherchée est la partie réelle de cette expression, soit

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos(nx/2)\,\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

2. Nous pouvons débuter de manière analogue en faisant apparaître des parties réelles d'exponentielles complexes. Cette fois-ci, la présence des coefficients binomiaux nous mènera à une identité remarquable : le binôme de Newton.

De manière analogue :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{Re}(e^{ikx}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k\right).\end{aligned}$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k = (1+e^{ix})^n.$$

En factorisant encore une fois l'argument moitié :

$$\begin{aligned}(1+e^{ix})^n &= (e^{ix/2}(e^{ix/2}+e^{-ix/2}))^n \\ &= e^{inx/2}2^n\cos^n(x/2).\end{aligned}$$

Enfin, en prenant la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = 2^n\cos(nx/2)\cos^n(x/2).$$

Exercice 2.2 : $\cos(2\pi/5)$

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2. On pose $z = \omega + \omega^{-1}$. Former une équation du second degré vérifiée par z.

3. En déduire les valeurs de $\cos(2\pi/5)$, $\sin(2\pi/5)$ et $\tan(2\pi/5)$.

1. C'est un résultat de cours!

En développant :

$$(1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 1 - \omega^5 = 0$$

car $\omega^5 = 1$.
Or $1 - \omega \neq 0$ donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

On aurait aussi pu remarquer que cette quantité est la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\omega \neq 1$, d'où :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$$

car $\omega^5 = 1$.

Cependant, quelle que soit la rédaction choisie, l'hypothèse $\omega \neq 1$ est essentielle pour pouvoir diviser par $1 - \omega$.

2. Il s'agit de faire apparaître une relation entre z et z^2. On a $z = \omega + \omega^{-1}$ et $z^2 = \omega^2 + 2 + \omega^{-2}$: il nous faut donc faire apparaître une relation entre les ω^k, k allant de -2 à 2, à partir de la première question qui est une relation entre les ω^k, k allant de 0 à 4. Pour cela, il suffit de diviser le résultat de la première question par ω^2.

Comme $\omega^2 \neq 0$ on déduit de la relation précédente :

$$\omega^{-2} + \omega^{-1} + 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

De plus,

$$z = \omega + \omega^{-1} \quad \text{et} \quad z^2 = \omega^2 + 2 + \omega^{-2}$$

d'où :

$$z^2 + z - 1 = 0.$$

3. Commençons par résoudre cette équation pour déterminer z.

Cette équation du second degré a pour discriminant 5 et ses racines sont, d'après les formules du cours :

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc $z = z_1$ ou $z = z_2$.

Il faut maintenant déterminer si $z = z_1$ ou $z = z_2$. Pour cela, nous allons étudier le signe de ces quantités.

On remarque que $z_2 < 0 < z_1$: il suffit donc de déterminer le signe de z pour conclure.
D'après la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} z &= \omega + \omega^{-1} \\ &= e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} \\ &= 2\cos(2\pi/5). \end{aligned}$$

Or $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\cos(2\pi/5) > 0$: on a donc $z = z_1$, ce qui donne

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Il reste désormais à utiliser les formules de trigonométrie usuelles pour déterminer les autres valeurs demandées. Ces formules faisant parfois intervenir des carrés il y aura à nouveau des questions de signes à étudier.

De la formule

$$\sin^2(2\pi/5) + \cos^2(2\pi/5) = 1$$

on tire successivement

$$\begin{aligned} \sin^2(2\pi/5) &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

d'où

$$\sin(2\pi/5) = \pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Le même argument que précédemment montre que $\sin(2\pi/5) > 0$ et donc

$$\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \tan(2\pi/5) &= \frac{\sin(2\pi/5)}{\cos(2\pi/5)} \\ &= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1}. \end{aligned}$$

Il s'agit de simplifier cette expression. Pour cela, nous allons élever au carré pour éliminer la « grande » racine carrée puis multiplier par la « quantité conjuguée » du dénominateur afin qu'il ne subsiste plus qu'une seule racine carrée, au numérateur.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \tan^2(2\pi/5) &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{(10 + 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} \\ &= \frac{80 + 32\sqrt{5}}{16} \\ &= 5 + 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Enfin, comme $\tan(2\pi/5) > 0$, on en déduit

$$\tan(2\pi/5) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Étant donnée la grande diversité des formules de trigonométrie il existe de nombreuses méthodes donnant ce résultat.

Par exemple, on aurait pu utiliser la relation $\cos^{-2} = 1 + \tan^2$; cependant, on remarque que l'on aurait encore eu à utiliser un argument de signe pour en déduire la valeur demandée.

Exercice 2.3 : Racines septièmes

On pose $z = e^{2i\pi/7}$, $s = z + z^2 + z^4$ et $t = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $s + t$ et st.

2. En déduire les valeurs de s et t.

Il faut bien lire l'énoncé ! Il demande de calculer $s+t$ et st **avant** de calculer s et t ; il est donc incorrect, et probablement difficile, de chercher dès le début à calculer s et t pour en déduire $s+t$ et st.

1. Le nombre z est par définition une racine septième de l'unité, donc $z^7 = 1$.

De plus, $z \neq 1$, donc $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 0$. Ce sont les deux seuls résultats du cours relatifs aux racines de l'unité : il faudra donc probablement s'en servir.

On a $s+t = z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$.
Or $1+z+\cdots+z^6 = 0$.
On a donc

$$s+t = -1.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} st &= (z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6) \\ &= z^4+z^5+z^6+3z^7+z^8+z^9+z^{10}. \end{aligned}$$

Or $z^7 = 1$, d'où l'on tire également

$$z^8 = z,\ z^9 = z^2 \quad \text{et} \quad z^{10} = z^3$$

soit

$$st = 3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6.$$

Enfin, d'après ce qui précède, $z+z^2+\cdots+z^6 = -1$.
On a donc

$$st = 2.$$

2. Il est ici demandé de trouver deux nombres complexes connaissant leur somme et leur produit. Pour cela, on utilise le résultat suivant du cours : la somme des racines de l'équation $az^2+bz+c = 0$ est $-b/a$ et leur produit c/a.

Les nombres s et t sont les racines complexes de l'équation du second degré d'inconnue z :

$$z^2-(s+t)z+st = 0$$

autrement dit :

$$z^2+z+2 = 0.$$

Son discriminant est -7 et ses racines sont donc

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

L'une de ces racines est s et l'autre t. Pour déterminer laquelle est effectivement s, il faut trouver un critère permettant de distinguer ces deux racines.

La différence entre z_1 et z_2 est le signe de leur partie imaginaire : en effet, $\mathrm{Im}(z_2) < 0$ et $\mathrm{Im}(z_1) > 0$. Il reste à évaluer le signe de $\mathrm{Im}(s)$ pour savoir si $s = z_1$ ou $s = z_2$. Pour cela, il faudra déterminer les positions relatives des réels de la forme $k\pi/7$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(s) &= \mathrm{Im}(e^{2i\pi/7} + e^{4i\pi/7} + e^{8i\pi/7}) \\ &= \sin(2\pi/7) + \sin(4\pi/7) + \sin(8\pi/7) \\ &= \sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7) - \sin(\pi/7)\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\sin(4\pi/7) &= \sin(\pi - 3\pi/7) \\ &= \sin(3\pi/7)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(8\pi/7) &= \sin(\pi + \pi/7) \\ &= -\sin(\pi/7).\end{aligned}$$

Or

$$0 < \pi/7 < 2\pi/7 < 3\pi/7 < \pi/2$$

donc, la fonction sinus étant strictement croissante sur $[0,\pi/2]$,

$$0 < \sin(\pi/7) < \sin(2\pi/7) < \sin(3\pi/7) < 1.$$

Ainsi,

$$\sin(2\pi/7) - \sin(\pi/7) > 0$$

et $\sin(3\pi/7) > 0$, d'où $\mathrm{Im}(s) > 0$; on a donc $s = z_1$ (d'où $t = z_2$), soit

$$s = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad t = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 2.4 : Linéarisation, formule de Moivre

1. Linéariser $\sin^3(x)$ et $\cos^4(x)$.

2. Exprimer $\cos(5x)$ sous forme d'une expression polynomiale en $\cos(x)$. De même, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

1. La méthode générale de linéarisation consiste à utiliser les formules d'Euler, puis à développer les puissances : on regroupe ensuite les exponentielles complexes pour faire réapparaître des formules d'Euler.

Avec les formules d'Euler on a successivement :

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{(2i)^3}(e^{ix}-e^{-ix})^3. \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (e^{ix}-e^{-ix})^3 &= (e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3 \\ &= e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}. \end{aligned}$$

Or, toujours d'après les formules d'Euler :

$$e^{3ix} - e^{-3ix} = 2i\sin(3x)$$

et

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

donc

$$(e^{ix}-e^{-ix})^3 = 2i(\sin(3x) - 3\sin(x)).$$

On a donc :

$$\sin^3(x) = \frac{1}{(2i)^2}(\sin(3x) - 3\sin(x))$$

soit

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

De même :

$$\begin{aligned}\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4.\end{aligned}$$

En développant la puissance il vient

$$\begin{aligned}(e^{ix}+e^{-ix})^4 &= ((e^{ix})^4+4(e^{ix})^3e^{-ix}+6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2\\ &\quad +4e^{ix}(e^{-ix})^3+(e^{-ix})^4)\\ &= e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\\ &= 2\cos(4x)+8\cos(2x)+6.\end{aligned}$$

On a donc enfin :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.$$

Dans ce dernier cas, il est également intéressant d'utiliser les formules de trigonométrie usuelles :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

donc

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4}(1+\cos(2x))^2$$

soit

$$\cos^4(x) = \frac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)).$$

Enfin,

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1+\cos(4x))$$

ce qui donne à nouveau le résultat.
Cependant, ces manipulations ne sont réalisables aisément que sur des cas assez particuliers ; pour s'en convaincre, essayez de linéariser la première expression par les formules de trigonométrie : les calculs deviennent rapidement illisibles.

2. Pour développer ces expressions, nous allons utiliser la formule de Moivre. Il s'agit en quelque sorte de l'opération inverse de la précédente.

Nous avons

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \operatorname{Re}(e^{5ix}) \\ &= \operatorname{Re}((e^{ix})^5). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Moivre :

$$(e^{ix})^5 = (\cos(x) + i\sin(x))^5$$

donc

$$\begin{aligned} (e^{ix})^5 &= \cos^5(x) + 5\cos^4(x)i\sin(x) + 10\cos^3(x)(i\sin(x))^2 \\ &\quad +10\cos^2(x)(i\sin(x))^3 + 5\cos(x)(i\sin(x))^4 + (i\sin(x))^5 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} (e^{ix})^5 &= \cos^5(x) + 5\cos^4(x)\sin(x)i - 10\cos^3(x)\sin^2(x) \\ &\quad -10\cos^2(x)\sin^3(x)i + 5\cos(x)\sin^4(x) + \sin^5(x)i \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} (e^{ix})^5 &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) \\ &\quad +(5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x))i. \end{aligned}$$

On a donc, en considérant la partie réelle :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x).$$

On peut éliminer les puissances paires de $\sin(x)$ par la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).$$

Avec la partie imaginaire on trouve, sans calcul supplémentaire :

$$\sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x).$$

Exercice 2.5 : Argument et arctangente

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit φ l'argument de $a + i$ pris dans $]-\pi,\pi]$. Montrer que $\varphi = \operatorname{Arctan}(1/a)$. Que dire si $a \in \mathbb{R}_-^*$?

2. À l'aide de ce qui précède, calculer $\operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arctan}(1/3)$.

1. Commençons par utiliser la relation entre la forme trigonométrique et la forme algébrique de $a+i$ afin de faire apparaître son argument.

Par définition, $a+i = |a+i|(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, donc

$$\tan(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(a+i)}{\mathrm{Re}(a+i)} = \frac{1}{a}.$$

On a donc $\varphi = \mathrm{Arctan}(1/a) + k\pi$ pour un certain entier relatif k.

Par définition de l'arctangente, l'égalité $\mathrm{Arctan}(x) = \theta$ signifie $\tan(\theta) = x$ **et** $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$.
D'autre part, $\tan(\theta) = \tan(\theta')$ si, et seulement si, $\theta \equiv \theta'[\pi]$.
Ainsi, on ne peut dire mieux que $\varphi = \mathrm{Arctan}(1/a) + k\pi$: l'entier k n'a *a priori* aucune raison d'être nul, comme on le verra dans le cas $a < 0$.

D'autre part, $\cos(\varphi) = a/|a+i| > 0$ et $\sin(\varphi) = 1/|a+i| > 0$: ceci montre que $\varphi \in]0,\pi/2[$.
Comme, de plus, $\mathrm{Arctan}(1/a) \in]0,\pi/2[$ (car $a > 0$) on a donc $k = 0$ et :

$$\varphi = \mathrm{Arctan}(1/a).$$

Dans le cas $a < 0$, on a toujours $\varphi = \mathrm{Arctan}(1/a) + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, mais cette fois $\cos(\varphi) < 0$ et $\sin(\varphi) > 0$: on a donc $\varphi \in]\pi/2,\pi[$.
D'autre part, a étant strictement négatif, $\mathrm{Arctan}(1/a) \in]-\pi/2,0[$: on a donc $k = 1$ et :

$$\varphi = \mathrm{Arctan}(1/a) + \pi.$$

2. Le problème n'est pas de se rendre compte qu'il faut utiliser le résultat précédent mais d'être conscient que tous les calculs seront faits modulo 2π puisque l'on manipule des arguments. Ainsi, nous n'aurons pas directement le résultat mais uniquement sa valeur à un multiple de 2π près, encore faudra-t-il l'encadrer pour le déterminer exactement.

Un calcul simple montre que $(2+i)(3+i) = 5+5i$.
En considérant des arguments :

$$\mathrm{Arg}(2+i) + \mathrm{Arg}(3+i) \equiv \mathrm{Arg}(5+5i)\ [2\pi].$$

Or, d'après ce qui précède, vu que 2 et 3 sont strictement positifs :

$$\mathrm{Arg}(2+i) \equiv \mathrm{Arctan}(1/2)\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(3+i) \equiv \mathrm{Arctan}(1/3)\ [2\pi]\,;$$

enfin, $\mathrm{Arg}(5+5i) \equiv \pi/4\ [2\pi]$.

On a donc :

$$\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3) \equiv \pi/4\ [2\pi].$$

Pour déterminer la valeur exacte de $\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3)$ il reste à déterminer un intervalle de largeur inférieure à π le contenant.

Or $0 < 1/3 < 1/2 < 1$ et Arctan est strictement croissante donc

$$0 < \text{Arctan}(1/2) < \text{Arctan}(1/3) < \pi/4$$

d'où

$$0 < \text{Arctan}(1/3) + \text{Arctan}(1/2) < \pi/2.$$

Or le seul élément de $]0,\pi/2[$ qui est congru à $\pi/4$ modulo π est $\pi/4$ lui-même : on a donc $\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3) = \pi/4$.

Une autre manière d'aborder ce calcul aurait été de calculer la tangente de la somme des arctangentes à l'aide d'une formule de trigonométrie : on aurait alors obtenu

$$\tan(\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3)) = 1 = \tan(\pi/4)$$

d'où

$$\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3) \equiv \pi/4\ [\pi].$$

Autrement dit, de toutes façons, nous n'aurions pas échappé à l'étude d'encadrements pour éliminer le « modulo ».

Ce calcul aurait aussi pu être effectué avec la formule de l'exercice **1.4** ; cependant, elle est hors-programme.

La manipulation simultanée d'arctangente et d'arguments de nombres complexes sera à nouveau rencontrée en Physique (filtres et fonctions de transfert).

Exercice 2.6 : Systèmes non linéaires

1. Résoudre le système, d'inconnue $(u,v) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} u+v &= 2 \\ uv &= -4 \end{cases}$

2. Résoudre le système, d'inconnue $(u,v) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} u+v &= 4 \\ 1/u+1/v &= 4 \end{cases}$

3. Résoudre le système, d'inconnue $(u,v) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} u+v &= 4 \\ u^2+v^2 &= 2 \end{cases}$

Le premier système est traité dans le cours : il s'agit de voir u et v comme les racines d'une équation du second degré à déterminer. Les deux autres peuvent se traiter en se ramenant à un système de cette forme : $u+v$ étant donné, il suffit de manipuler l'autre expression pour faire apparaître uv.

1. Appliquons directement le cours.

D'après le cours, u et v sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2-(u+v)z+uv=0$, *i.e.* $z^2-2z-4=0$.
Son discriminant est 20 et ses racines sont donc $(2 \pm \sqrt{20})/2$;
avec $20=2^2 5$ on peut les réécrire $1 \pm \sqrt{5}$.
On a donc les deux couples de solutions :

$$(u,v)=(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad (u,v)=(1+\sqrt{5},1-\sqrt{5}).$$

2. Ramenons-nous à un problème du type précédent. Nous avons déjà la valeur de $u+v$. D'autre part

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}$$

ce qui permet de trouver uv.

On a

$$4=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}$$

et

$$u+v=4$$

d'où

$$uv=1$$

Ainsi, u et v sont les racines de z^2-4z+1.

Ce polynôme du second degré a pour discriminant 12 et ses racines sont $2 \pm \sqrt{3}$, d'où les couples de solutions éventuelles :

$$(u,v)=(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad (u,v)=(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}).$$

Nous avons démontré qu'il ne pouvait y avoir d'autres solutions, il reste donc à vérifier que celles-ci conviennent bien, ce qui est aisé.

3. Pour faire apparaître u^2 et v^2, il suffit de calculer $(u+v)^2$.

Soit (u,v) une solution de ce système.
On a

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

d'où, comme $u+v=4$ et $u^2+v^2=2$:

$$uv = 7.$$

Les inconnues u et v sont donc les racines de $z^2 - 4z + 7$, dont le discriminant est -12.
Ses racines sont donc $2 \pm i\sqrt{3}$ d'où les solutions éventuelles :

$$(u,v) = (2 - i\sqrt{3}, 2 + i\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad (u,v) = (2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}).$$

De même, il est facile de vérifier qu'elles conviennent bien.

Exercice 2.7 : Méthode de Cardan

On considère deux nombres complexes non nuls p et q et l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E)\; z^3 + pz + q = 0.$$

On considère également l'équation (R) d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(R)\; Z^2 + qZ - p^3/27 = 0.$$

Soient U et V les racines complexes de (R). Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

1. Montrer que $u \neq 0$. On pose alors $v = -p/(3u)$.

2. Calculer u^3v^3 ; en déduire que $v^3 = V$.

3. En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

4. Montrer que $u + v$ est solution de (E).

5. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ (avec $j = e^{2i\pi/3}$) sont aussi solutions de (E).

6. Application : on prend $p = q = -1$. Calculer U, V, puis u, v et enfin la valeur exacte de la racine réelle de $z^3 - z - 1$.

7. Application : comme précédemment avec $p = -3$ et $q = 1$.

1. Si $u = 0$, $U = 0$ et il suffit de remplacer dans (R) pour obtenir une contradiction.

Si $u = 0$, $U = u^3 = 0$ et 0 serait racine de (R) donc le terme constant $p^3/27$ serait nul, ce qui contredit $p \neq 0$. On a donc $u \neq 0$.

Ceci permet de donner un sens à $v = -p/(3u)$. D'une manière générale il convient de vérifier systématiquement, quand un quotient intervient, que le dénominateur n'est pas nul.

2. Le produit uv est connu par définition de v.

Par définition

$$uv = -\frac{p}{3}$$

donc

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Or, d'après le cours, le terme constant de $Z^2 + qZ - p^3/27$ est le produit de ses racines qui sont par définition U et V : on a donc

$$UV = u^3v^3.$$

Comme $u^3 = U$ on a donc $Uv^3 = UV$. Enfin, $U \neq 0$, d'où $v^3 = V$.

3. Comme précédemment, la valeur de $U + V$ est donnée par les coefficients de l'équation (R).

Le coefficient de Z dans $Z^2 + qZ - p^3/27$ est, d'après le cours, l'opposé de la somme de ses racines, *i.e.*

$$U + V = -q.$$

On a donc, d'après le résultat précédent :

$$u^3 + v^3 = -q.$$

4. Il suffit de remplacer z par $u + v$ dans l'équation (E) : tous les calculs nécessaires ont été effectués dans les questions précédentes.

On a $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ donc

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q.$$

Or $3uv + p = 0$ (car $v = -p/(3u)$) et $u^3 + v^3 = -q$ donc

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0.$$

$u + v$ est donc bien solution de (E).

5. Le nombre complexe ju est aussi une racine cubique de U : on peut donc reprendre le même raisonnement en remplaçant u par $u' = ju$. Alors v est remplacé par $v' = -p/(3u') = j^2v$ (car $j^{-1} = j^2$) et $u' + v' = ju + j^2v$ est solution de (E). Idem pour $j^2u + jv$.

6. On cherche ici à résoudre l'équation $z^3 = z + 1$. L'équation (R) est $Z^2 - Z + 1/27 = 0$, dont le discriminant est $23/27$. Ses racines sont donc

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{23/27}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(1 - \sqrt{23/27}).$$

Prenons $U = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{23/27})$. On peut alors choisir

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{23/27})}$$

et on a alors

$$v = -p/(3u) = 1/(3u).$$

Ceci est difficile à calculer, mais v vérifie une autre relation simple :

$$v^3 = V = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{23/27}).$$

Ainsi, d'après le cours sur les racines n-ièmes, v est de la forme $j^k w$, avec $k \in \{0,1,2\}$ et w une racine cubique de V.
On peut choisir

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{23/27})}.$$

D'autre part, v est réel, car $v = -1/(3u)$ avec u réel : on a donc $k = 0$ et $v = w$, ce qui fournit une solution réelle de (E) :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+\sqrt{23/27})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1-\sqrt{23/27})}.$$

L'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - x - 1$ montre qu'il n'y en a pas d'autre.
En effet, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - x - 1.$$

f est dérivable et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi, f' est strictement positive sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ et $]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty[$ et strictement négative sur $]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Il reste à déterminer les valeurs de f en $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et, plus précisément, leur signe, afin de savoir combien de fois f s'annule sur $\mathbb{R}$.
En réduisant les fractions au même dénominateur on obtient

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{-1+3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0.$$

et

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1-3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0.$$

Nous pouvons dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\frac{2+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$		

Les valeurs prises en $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ étant strictement négatives, nous en déduisons que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un unique réel x vérifiant $x^3 = x + 1$ (et le tableau permet également d'affirmer que, de plus, $x > 1/\sqrt{3}$).

Il est en fait inutile de calculer $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$: f étant strictement décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a sans calcul l'inégalité

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0.$$

7. Ici, (R) est $Z^2 + Z + 1 = 0$ dont les racines sont j et j^2.
Prenons $U = j$. Alors on peut prendre

$$u = e^{2i\pi/9} \quad \text{et} \quad v = -p/(3u) = 1/u = e^{-2i\pi/9}$$

ce qui donne

$$u + v = 2\cos(2\pi/9).$$

D'autre part, $ju = e^{8i\pi/9}$ et $j^2v = e^{-8i\pi/9}$, ce qui fournit une autre solution :

$$ju + j^2v = 2\cos(8\pi/9) = -2\cos(\pi/9).$$

Enfin, avec $j^2u = e^{14i\pi/9}$ et $jv = e^{-14i\pi/9}$ il vient

$$j^2u + jv = 2\cos(14\pi/9) = -2\cos(5\pi/9).$$

Équations différentielles

3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

La méthode pour résoudre complètement une équation différentielle linéaire du premier ordre est toujours la même.

- Dans un premier temps, on résout l'équation homogène associée, c'est-à-dire l'équation dont le premier membre est identique et le second membre est égal à 0. Cette première partie peut être traitée directement à l'aide des théorèmes du cours : si l'équation homogène est de la forme

$$y' - a(x)y = 0,$$

l'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{A(x)}$, où la fonction A est une primitive de a et C est une constante.

- Dans un second temps, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.

Une façon de résoudre ce problème consiste à utiliser la méthode dite de *variation de la constante* : on cherche des solutions sous la forme

$$x \mapsto f(x)e^{A(x)},$$

où f désigne une fonction inconnue (c'est la constante qui varie). En réinjectant cette solution dans l'équation, on obtient f', d'où f par un calcul de primitive.

- À la fin de ces deux étapes, on connaît toutes les solutions de l'équation différentielle : ce sont exactement les fonctions qui peuvent s'écrire comme somme de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Exercice 3.1 : Équation du premier ordre et variation de la constante

Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)\, y' - 2x\, y = 1 + x^2.$$

Cette équation n'est pas tout à fait de la forme du cours : il y a une fonction en facteur du terme y'. On se ramène à une équation de la forme souhaitée en divisant par $1 + x^2$ après avoir bien sûr vérifié que cette division était licite.

• Intéressons-nous, tout d'abord, à l'équation homogène associée :

$$(1 + x^2)\, y' - 2x\, y = 0.$$

Puisque la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cette dernière équation se ramène à

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}\, y = 0.$$

Nous connaissons toutes les solutions d'une telle équation différentielle : ce sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto C\, e^{F(x)}$$

où C désigne un nombre réel et F une primitive de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x/(1 + x^2).$$

Il nous reste à trouver une primitive de la fonction f.

Cette dernière s'écrit sous la forme u'/u et admet donc une primitive de la forme $\ln \circ |u|$.

Aussi pouvons-nous choisir pour F la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + x^2).$$

Comme $e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$ on obtient pour l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto C\,(1 + x^2) \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Exhibons, à présent, une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

Nous la chercherons en utilisant la méthode de la variation de la constante, donc sous la forme

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x)(1 + x^2)$$

où h est une fonction dérivable inconnue.

La fonction g est solution de l'équation si, et seulement si, on a, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x^2)g'(x) - 2xg(x) = 1 + x^2$$

soit

$$(1+x^2)(h'(x)(1+x^2) + 2x\,h(x)) - 2x\,h(x)(1+x^2) = 1 + x^2$$

ou encore, les termes en $h(x)$ se simplifiant (ce qui est toujours le cas en appliquant cette méthode) :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction $h = \text{Arctan}$ vérifie cette dernière égalité.
On en déduit que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \text{Arctan}(x)(1+x^2)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

- Toutes les solutions s'obtiennent à partir de cette dernière en ajoutant une solution de l'équation différentielle homogène associée. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto (\text{Arctan}(x) + C)\,(1+x^2) \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3.2 : Équation fonctionnelle de l'exponentielle

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui-même, non nulle, telle que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Fixons un réel u et soit $g : x \mapsto f(x+u)$. Calculer de deux façons différentes $g'(0)$.

2. En déduire qu'il existe un réel a tel que la fonction f vérifie $f' = af$.

3. Montrer qu'on a alors : pour tout réel x, $f(x) = e^{ax}$.

1. u est ici un réel fixé, autrement dit une constante ; $f(u)$ est donc également une constante. C'est ainsi que la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)f(u)$ est $x \mapsto f'(x)f(u)$.

Pour ne pas commettre d'erreur grossière, comme par exemple écrire

$$f'(x)f(u) + f(x)f'(u)$$

dans l'expression de la dérivée, il faut donc impérativement se poser la question de savoir qui est la variable et qui est une constante.

On a d'une part, pour tout réel x, $g'(x) = f'(x+u)$, soit $g'(0) = f'(u)$.

D'autre part, comme $g(x) = f(x)f(u)$ pour tout réel x, on a également la relation $g'(x) = f'(x)f(u)$, d'où $g'(0) = f'(0)f(u)$.

2. Les relations précédentes étant vraies pour tout u et tout x, on peut choisir une valeur particulière pour l'un d'eux afin d'obtenir la relation demandée.

La question précédente montre que, pour tout réel u, $f'(u) = f'(0)f(u)$. En posant $a = f'(0)$ on a donc montré que $f' = af$.

3. Il existe donc un réel λ tel que, pour tout réel x, $f(x) = \lambda e^{ax}$. Il reste à déterminer λ. Pour cela, il suffit de calculer $f(0)$, ce que l'on peut faire en utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par f. Autrement dit, nous allons déterminer une condition initiale : connaître la valeur en un point d'une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre permet de déterminer entièrement cette solution.

D'après le cours il existe un réel λ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\, e^{ax}.$$

D'une part, on a $f(0) = \lambda$.
D'autre part, $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou 1, *i.e.* $\lambda \in \{0,1\}$.
Si λ était nul, f serait identiquement nulle, ce qui est exclu par hypothèse.
On a donc $\lambda = 1$ d'où :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = e^{ax}.$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

La méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est systématique.

- Dans un premier temps, on résout l'équation homogène associée. Cette première partie peut être traitée directement à l'aide des théorèmes du cours en utilisant l'équation caractéristique.
- Dans un second temps, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.

Dans certains cas simples, nous savons sous quelle forme chercher les solutions. Par exemple, lorsque le second membre s'écrit sous la forme $P(x)e^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un nombre complexe, on cherche une solution sous la forme $Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme. Lorsque α n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher Q de même degré que P ; si α en est racine simple, augmenter le degré de 1 et, s'il est racine double, l'augmenter de 2.

- À la fin de ces deux étapes, on connaît toutes les solutions de l'équation différentielle : ce sont exactement les fonctions qui peuvent s'écrire comme somme de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Exercice 3.3 : Équation du second ordre : second membre exponentiel

Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = (6x - 5)e^{-x}.$$

- Cherchons, tout d'abord, les solutions de l'équation homogène associée

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

L'équation caractéristique de cette équation est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les racines sont 1 et 2.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^x + Be^{2x} \mid A,B \in \mathbb{R}\}.$$

- Déterminons, à présent, une solution particulière de l'équation avec second membre.

Nous savons que lorsque le second membre de l'équation est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un nombre complexe différent des racines du polynôme caractéristique, on peut trouver une solution de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme de même degré que P.

Par conséquent, nous allons chercher une solution sous la forme

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto (ax + b)e^{-x},$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Un simple calcul montre que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout réel x :

$$\begin{cases} f'(x) &= (-ax + a - b)e^{-x} \\ f''(x) &= (ax + b - 2a)e^{-x} \end{cases}$$

et donc

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (6ax - 5a + 6b)e^{-x}.$$

Par conséquent, la fonction f est solution si, et seulement si, on a

$$6ax - 5a + 6b = 6x - 5.$$

Cette dernière égalité est vérifiée lorsque $a = 1$ et $b = 0$.
On en déduit que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre.

• Finalement, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-x} + Ae^{x} + Be^{2x} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3.4 : Équation du second ordre : second membre trigonométrique

Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x + 8)\cos(x) + (4x + 2)\sin(x).$$

Dans cet exercice nous verrons les deux manières d'aborder les équations différentielles du second ordre : soit en effectuant les calculs dans $\mathbb{C}$ pour revenir aux réels à la fin, soit en calculant directement dans $\mathbb{R}$.
L'approche avec les complexes peut paraître moins naturelle mais elle est beaucoup plus souple au niveau des calculs ; elle sera très souvent utilisée en Physique.

• Cherchons, tout d'abord, les solutions de l'équation homogène associée

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 13 = 0$, dont les racines complexes sont $2 + 3i$ et $2 - 3i$.
On en déduit, d'après les formules du cours, que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation homogène est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\},$$

ou encore que l'ensemble de ses solutions à valeurs réelles est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x) \mid (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Déterminons, à présent, une solution particulière de l'équation avec second membre.

Deux méthodes s'offrent à nous. La première consiste à chercher une solution sous la forme

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x),$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a alors :

$$\begin{cases} f'(x) &= (cx+a+d)\cos(x) + (-ax+c-b)\sin(x) \\ f''(x) &= (-ax+2c-b)\cos(x) - (cx+2a+d)\sin(x) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) &= ((12a-4c)x - 4a + 12b + 2c - 4d)\cos(x) \\ &\quad +((12c+4a)x - 2a + 4b - 4c + 12d)\sin(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f est solution si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} 12a - 4c &= 12 \\ 12c + 4a &= 4 \\ -4a + 12b + 2c - 4d &= 8 \\ -2a + 4b - 4c + 12d &= 2 \end{cases}$$

Ces égalités sont vérifiées lorsque $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ et $d = 0$.

On en déduit que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)\cos(x)$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre.

• La seconde méthode consiste à considérer la fonction

$$s : x \in \mathbb{R} \mapsto (12x+8)\cos(x) + (4x+2)\sin(x)$$

comme la partie réelle de la fonction

$$S : x \in \mathbb{R} \mapsto ((12-4i)x + (8-2i))e^{ix}.$$

Nous allons chercher une solution particulière de l'équation avec S au second membre et en déduirons une solution particulière de l'équation de départ en prenant sa partie réelle.

Considérons donc une fonction de la forme

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\alpha x + \beta)e^{ix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et un simple calcul montre que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} g'(x) &= (i\alpha x + (\alpha + i\beta))e^{ix} \\ g''(x) &= (-\alpha x + 2i\alpha - \beta)e^{ix} \end{cases}$$

et donc

$$g''(x) - 4g'(x) + 13g(x) = ((12\alpha - 4i\alpha)x + 12\beta - 4\alpha + i(2\alpha - 4\beta))e^{ix}.$$

Par conséquent, la fonction g est solution de l'équation avec second membre S si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} 12\alpha - 4i\alpha &= 12 - 4i \\ 12\beta - 4\alpha + i(2\alpha - 4\beta) &= 8 - 2i \end{cases}$$

Ces égalités sont vérifiées lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.
On en déduit que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)e^{ix}$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre S et donc que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)\cos(x)$$

est une solution particulière de l'équation de départ.
• Finalement, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (x+1)\cos(x) + Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x) \mid (C, D) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 3.5 : Équation du second ordre : racine double

Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = 2\,e^{2x}.$$

• L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui possède la racine double 2. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (Ax + B)e^{2x} \mid A, B \in \mathbb{R}\},$$

• Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre. Le second membre est $2e^x = P(x)e^x$ avec P le polynôme constant (*i.e.* de degré 0) valant 2.

Le coefficient de x dans l'exponentielle est 2 et est donc racine double de l'équation caractéristique. Ainsi, on cherche une solution particulière sous la forme $g : x \mapsto Q(x)e^{2x}$ avec Q de degré 2 de plus que celui de P, *i.e.* $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Des calculs simples montrent que, pour tout réel x :

$$\begin{cases} g'(x) &= (2a\,x^2 + (2a + 2b)\,x + (b + 2c))e^{2x} \\ g''(x) &= (4a\,x^2 + (8a + 4b)\,x + (2a + 4b + 4c))e^{2x}. \end{cases}$$

On obtient alors, en reportant dans l'équation complète et après simplification des termes en x et x^2 : $2ae^{2x} = 2e^{2x}$, d'où $a = 1$; aucune condition n'étant imposée sur b et c on peut les choisir nuls, ce qui donne la solution particulière $x \mapsto x^2e^{2x}$.

• Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 + Ax + B)e^{2x} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Si on n'avait pas pris garde au fait que 2 est racine double de l'équation caractéristique et qu'on avait donc cherché une solution particulière avec Q de degré 0 (*i.e.* constant) on aurait abouti à $0 = 0$… D'autre part, on voit que le choix de b et c est sans importance : on peut toujours les inclure dans les constantes A et B qui apparaissent dans l'expression des solutions de l'équation complète.

Géométrie

4

Exercice 4.1 : Géométrie du triangle

Dans le plan on considère un triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. On note $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$, $\hat{C}$) l'angle non orienté au sommet A (resp. B, C). Soit S l'aire de ABC. Enfin, on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (demi-périmètre de ABC).

1. Soit R le rayon du cercle circonsrit à ABC. Montrer que $4RS = abc$.

2. Soit r le rayon du cercle inscrit dans ABC. En considérant les aires des triangles IAB, IBC et ICA, montrer que $2S = r(a+b+c)$.

3. Montrer que $2Rr = \dfrac{abc}{a+b+c}$.

1. Une seule formule usuelle de géométrie fait intervenir R : c'est $a = 2R\sin(\hat{A})$. Il faudra donc probablement s'en servir, mais cela introduira un sinus dans les calculs.

Ainsi, nous chercherons à relier $\sin(\hat{A})$ et S afin de faire apparaître S dans le résultat tout en éliminant $\sin(\hat{A})$.

> La hauteur issue de B a pour longueur $c\sin(\hat{A})$ (par définition du sinus). On a donc
>
> $$S = \frac{1}{2}bc\sin(\hat{A}).$$
>
> De plus, d'après le cours :
>
> $$a = 2R\sin(\hat{A}).$$
>
> De ces deux relations on tire :
>
> $$4RS = abc.$$

2. Les hauteurs des petits triangles IAB, IBC et ICA sont des rayons du cercle inscrit et ont donc pour longueur r. Quand aux bases de ces triangles, ce ne sont autres que les côtés du grand triangle ABC. On peut alors calculer les aires de tous ces triangles.

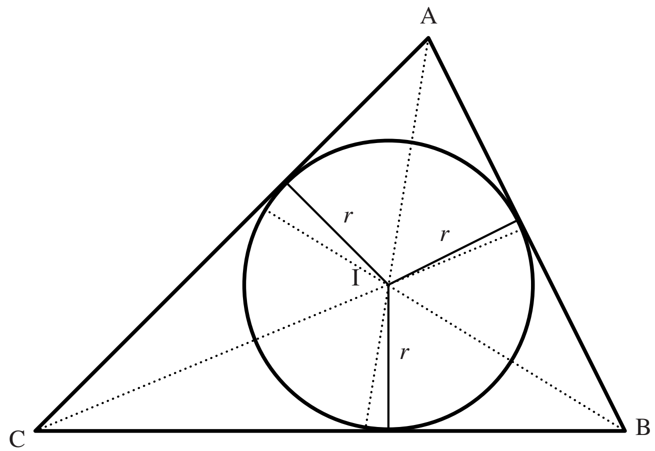
La hauteur issue de I du triangle IAB a pour longueur r (car (AB) est tangente au cercle inscrit) et le côté opposé est c ; son aire est donc $rc/2$.
De même, l'aire de IBC est $ra/2$ et celle de ICA est $rb/2$.
Or l'aire du triangle ABC est la somme des aires de ces trois triangles : on a donc

$$S = r(a + b + c)/2$$

soit encore

$$2S = r(a + b + c).$$

Graphiquement, avec les bissectrices en pointillés :



3. Vous avez établi deux formules contenant S, l'une contenant R et l'autre r ; on vous demande une formule contenant R et r mais pas S. Il faut donc éliminer S entre les deux relations.

On élimine S entre les deux relations précédentes : comme

$$4RS = abc \quad \text{et} \quad S = r(a + b + c)/2$$

on a, en remplaçant dans la première relation S par la valeur donnée dans la seconde :

$$4Rr(a+b+c)/2 = abc$$

soit

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Raisonnons un instant en termes physiques : les lettres a, b, c, R et r désignent des longueurs et S une aire. On constate que toutes les formules ci-dessus sont bien homogènes !
Mieux encore : les lettres a, b et c jouent des rôles identiques dans le problème car les permuter revient à changer les noms des côtés mais ne modifie pas R, r ni S ; on constate que les formules obtenues sont bien, elles aussi, invariantes par permutation de a, b et c.

Exercice 4.2 : Formule de Héron

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que $4S^2 = b^2c^2(1-\cos^2(\hat{A}))$.

2. Exprimer $16S^2$ en fonction de a, b et c (sans fonction trigonométrique).

3. En reconnaissant des identités remarquables, montrer que

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \quad \text{(formule de Héron).}$$

1. Dans l'exercice **4.1** nous avions un résultat presque identique : il y avait un sinus mais pas de carrés... Nous allons donc reprendre la formule reliant S, b, c et $\sin(\hat{A})$ et l'élever au carré.

On reprend l'expression de S donnée ci-dessus :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$$

d'où

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\sin^2(\hat{A}) \\ &= b^2c^2(1-\cos^2(\hat{A})). \end{aligned}$$

2. Une formule permet de faire disparaître le cosinus pour n'avoir plus que les longueurs des côtés : c'est la formule d'Al-Kâshi.

On rappelle la formule d'Al-Kâshi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4b^2c^2 - 4b^2c^2\cos^2(\hat{A}) \\ &= 4b^2c^2 - (a^2 - (b^2 + c^2))^2. \end{aligned}$$

3. Les identités remarquables à reconnaître sont visiblement des différences de carrés ; de plus, on voit qu'il y a des termes croisés (*i.e.* faisant intervenir un produit de deux paramètres), les formules de développement de carrés de sommes ou de différences pourront donc également intervenir.

On reconnaît une différence de carrés :

$$\begin{aligned} 4b^2c^2 - (a^2 - (b^2 + c^2))^2 &= (2bc + (a^2 - (b^2 + c^2))) \\ &\quad \times (2bc - (a^2 - (b^2 + c^2))) \\ &= (a^2 - b^2 + 2bc - c^2) \\ &\quad \times (-a^2 + b^2 + 2bc + c^2). \end{aligned}$$

Chaque terme est lui-même un développement de carré :

$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

et

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2.$$

On a donc

$$16S^2 = (a^2 - (b - c)^2)(-a^2 + (b + c)^2).$$

On reconnaît enfin dans chaque facteur une différence de carrés :

$$(a^2 - (b - c)^2) = (a - (b - c))(a + (b - c))$$

$$(-a^2 + (b + c)^2) = ((b + c) + a)((b + c) - a)$$

soit :

$$16S^2 = (a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)(-a + b + c).$$

Or

$$\begin{cases} -a+b+c &= 2(p-a) \\ a-b+c &= 2(p-b) \\ a+b-c &= 2(p-c) \\ a+b+c &= 2p \end{cases}$$

d'où, en réorganisant les termes :

$$16S^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Encore une fois la formule est homogène, chaque membre ayant la dimension d'une longueur à la puissance quatre.

Exercice 4.3 : Droite d'Euler

Soit ABC un triangle non aplati, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre et G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de montrer que O, G et H sont alignés. Quand ces trois points ne sont pas confondus (*i.e.* quand le triangle n'est pas équilatéral) la droite qui les porte s'appelle la *droite d'Euler* du triangle ABC.

On rappelle que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan, et qu'un vecteur $\vec{w}$ vérifie $\vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, alors $\vec{w} = \vec{0}$.

1. Que valent $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$?

2. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

3. Quelle est la nature du triangle OAB ? En déduire la valeur de $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}$, puis celle de $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

4. À l'aide des questions précédentes, calculer les produits scalaires de $(\overrightarrow{OH} - 3\,\overrightarrow{OG})$ avec $\overrightarrow{AB}$ puis avec $\overrightarrow{AC}$.

5. Montrer que O, G et H sont alignés et préciser leurs positions relatives.

Une figure complète se trouve à la fin de la correction. Vous pouvez bien sûr vous y référer pour mieux visualiser l'exercice et le résoudre mais la meilleure chose à faire est bien sûr de réaliser vous-même cette figure.

Faire une bonne figure est toujours intéressant en géométrie ; cependant, il faut bien prendre garde à ne pas faire de figure trop particulière.

Plus précisément, aucune hypothèse n'est faite sur le triangle : il n'est supposé ni rectangle, ni isocèle (ni, *a fortiori*, équilatéral). Il faudra donc faire une figure avec un triangle **le plus quelconque possible** afin de ne pas être abusé par des propriétés spécifiques de ces triangles remarquables.

Un dernier conseil : dessinez un triangle *acutangle*, *i.e.* sans angle obtus : ainsi vous serez certain que l'orthocentre est à l'intérieur du triangle. Quand un angle est obtus l'orthocentre est en dehors, ce qui n'est pas un problème en soi, mais il peut se trouver tellement loin qu'il sort de la feuille !

1. Par définition, une hauteur issue d'un sommet est orthogonale au côté opposé.

B et H sont sur la hauteur de ABC issue de B, donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. Idem en échangeant les rôles de A, B et C : les trois produits scalaires donnés sont donc nuls.

2. La définition du barycentre fait intervenir les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$; pour éliminer les deux derniers, on peut utiliser la relation de Chasles en introduisant le point A.

Par définition,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

En introduisant le point A la relation de Chasles donne

$$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

soit

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

3. Rappelons que, par définition, O est équidistant de A, B et C.

O est le centre du cercle circonscrit à ABC donc $OA=OB=OC$: le triangle OAB est donc isocèle en O.

Le vecteur $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ dirige la médiane de OAB issue de O ; or cette médiane est une médiatrice, puisque le triangle est isocèle en O, donc orthogonale à (AB).

Ainsi,

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Avec $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ on en déduit :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{AB^2}{2}.$$

4. Les questions précédentes font intervenir un certain nombre de vecteurs qui ne sont pas ceux qui apparaissent ici : la relation de Chasles s'impose.

On a, en introduisant le point C :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

D'autre part, en introduisant A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}) \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (-2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

et enfin :

$$(\overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}) \cdot \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} - AB^2 = 0$$

car

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{AB^2}{2}.$$

On montre de même que $(\overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

5. Comme souvent pour la dernière question tout a été fait avant !

D'après le rappel de l'énoncé appliqué à :

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \\ \vec{w} = \overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG} \end{cases}$$

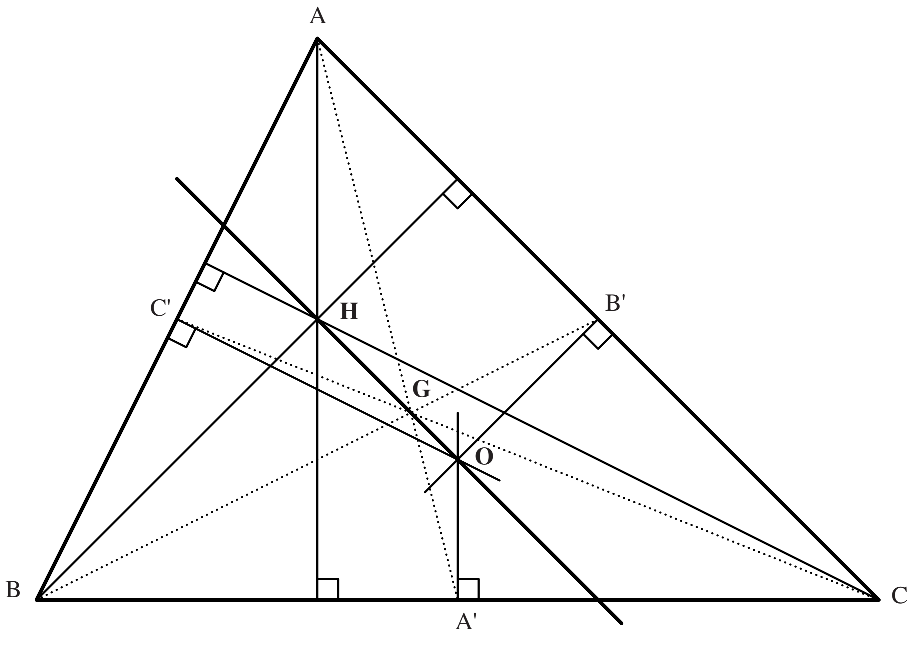
il vient

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Les points O, G et H sont donc alignés.

On a même plus : G est entre O et H et la longueur OG est le tiers de la longueur OH.

Voici la figure, les milieux des côtés étant désignés par A', B' et C' et les médianes tracées en pointillés :



Exercice 4.4 : Cercle d'Euler

Cet exercice utilise le résultat de l'exercice **4.3.** On garde les mêmes notations. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des côtés BC, CA et AB. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et Ω son centre.

1. Montrer que l'isobarycentre de $A'B'C'$ est G.

2. Montrer que son orthocentre est O.

3. En appliquant les résultats des questions concernant la droite d'Euler au triangle $A'B'C'$ montrer que Ω est le milieu de $[OH]$.

4. Soit H_A le pied de la hauteur de ABC issue de A, *i.e.* le point de (BC) par lequel passe cette hauteur. On définit de manière analogue H_B et H_C.
En appliquant le théorème de Thalès au quadrilatère H_AHOA' montrer que H_A est sur Γ.
Soit K_A (resp. K_B, K_C) le milieu de $[AH]$ (resp. $[BH]$, $[CH]$). Soit Ω' le centre du cercle circonscrit au triangle $K_AK_BK_C$, G' son isobarycentre et H' son orthocentre.

5. Montrer que $H' = H$.

6. Montrer que $\overrightarrow{HG'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HG}$.

7. En utilisant le résultat sur la droite d'Euler appliqué au triangle $K_AK_BK_C$ montrer que $\Omega' = \Omega$.

8. Montrer que $\overrightarrow{\Omega K_A} = -\overrightarrow{\Omega A'}$.

9. Montrer que les neufs points A', B', C', H_A, H_B, H_C, K_A, K_B et K_C sont cocycliques.

1. La définition de G fait intervenir A, B et C ; il reste à utiliser la relation de Chasles pour éliminer ces trois points et les remplacer par A', B' et C'.

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\
&= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{A'C} \\
&= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GA'} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GA'}
\end{aligned}$$

ce qui montre que G est l'isobarycentre de $A'B'C'$.

2. O est l'intersection des médiatrices de ABC et on souhaite montrer que c'est l'intersection des hauteurs de $A'B'C'$.

Les points A', B' et C' étant les milieux des côtés de ABC ces triangles sont semblables : le théorème de Thalès est donc bien adapté à la question.

D'après le théorème de Thalès, $(B'C')$ est parallèle à (BC). La médiatrice de ABC passant par A' est donc orthogonale à $(B'C')$. De plus, elle passe par A', donc c'est aussi la hauteur de $A'B'C'$ issue de A'. Idem pour les autres médiatrices de ABC : ce sont les hauteurs de $A'B'C'$, ce qui montre que l'orthocentre de ce dernier est O.

3. Tout est dans l'intitulé de la question !

On a donc, d'après la propriété de la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$, $\overrightarrow{\Omega O} = 3\overrightarrow{\Omega G}$. Or $\overrightarrow{\Omega G} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ d'où $-2\overrightarrow{\Omega O} = \overrightarrow{OH}$ ou encore $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$: Ω est donc le milieu de $[OH]$.

4. L'énoncé donne la méthode : utiliser le théorème de Thalès. Il faudra donc utiliser des propriétés de parallélisme ; on voit par exemple que les droites $(H_A H)$ et (OA'), dont il est question dans l'énoncé, sont parallèles...

Il suffit de le faire pour H_A, un raisonnement analogue donnant le résultat pour H_B et H_C.
Soit I le milieu de $[H_A A']$. Consisérons le quadrilatère $H_A H O A'$. Les côtés $[H_A H]$ et $[OA']$ sont tous deux orthogonaux au côté $[H_A A']$ donc sont parallèles. De plus, I étant le milieu de $[H_A A']$ et Ω celui de $[OH]$, la droite (ΩI) est parallèle à $(H_A H)$ et (OA'), donc orthogonale au côté $[H_A A']$. Cette droite, qui est par définition la médiane de $\Omega H_A A'$ issue de Ω, en est donc également une médiatrice. Le triangle $\Omega H_A A'$ est donc isocèle en Ω, donc $\Omega H_A = \Omega A'$. H_A est donc sur le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega A'$, *i.e.* $H_A \in \Gamma$.

5. Il suffit de montrer que $K_A K_B K_C$ a les mêmes hauteurs que ABC.

La hauteur de ABC issue de A passe par H, donc par K_A. De plus, dans le triangle HBC, K_B est le milieu de HB et K_C celui de HC ; d'après le théorème de Thalès, $(K_B K_C)$ et (BC) sont parallèles. La hauteur de ABC issue de A étant orthogonale à (BC), elle l'est donc aussi à $(K_B K_C)$. Ceci montre que cette hauteur de ABC est aussi la hauteur de $K_A K_B K_C$ issue de K_A. Il en va clairement de même pour les autres hauteurs. On a donc $H' = H$.

6. Encore une fois, la relation de Chasles sera utile : nous avons des relations vectorielles faisant intervenir les points dont il est question, la relation de Chasles permettra de faire apparaître exactement les vecteurs demandés.

On a, par définition, $\overrightarrow{G'K_A} + \overrightarrow{G'K_B} + \overrightarrow{G'K_C} = \vec{0}$ donc, en introduisant H par la relation de Chasles, $3\overrightarrow{G'H} + \overrightarrow{HK_A} + \overrightarrow{HK_B} + \overrightarrow{HK_C} = \vec{0}$.
Or, par définition, on a $\overrightarrow{HK_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$ (et de même pour B et C), soit encore $\overrightarrow{HK_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. En remplaçant dans la relation ci-dessus, compte tenu du fait que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on obtient : $3\overrightarrow{G'H} + \frac{3}{2}\overrightarrow{HG} = \vec{0}$, on encore $\overrightarrow{HG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$.

7. C'est une question tout à fait analogue à la question 3 : on utilise un résultat précédent en l'appliquant à un autre triangle. Autant il est difficile d'y penser soi-même, autant il n'y a aucun problème à appliquer ce résultat quand l'énoncé suggère de le faire.

La propriété de la droite d'Euler du triangle $K_AK_BK_C$ s'écrit $\overrightarrow{\Omega'H'} = 3\overrightarrow{\Omega'G'}$, soit encore $\overrightarrow{\Omega'H} = 3\overrightarrow{\Omega'G'} = 3\overrightarrow{\Omega'H} + 3\overrightarrow{HG'}$, ce qu'on peut écrire $-2\overrightarrow{\Omega'H} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$.
Or, d'après la propriété de la droite d'Euler de ABC, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OH} + 3\overrightarrow{HG}$, d'où $-2\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{HG}$. Ω étant le milieu de $[OH]$, on a $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{\Omega H}$ d'où $-4\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{HG}$. Comme $-2\overrightarrow{\Omega'H} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$ il vient $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega'H}$, soit $\Omega' = \Omega$.

8. D'après ce qui précède, le cercle circonscrit à $K_AK_BK_C$ a même centre que Γ. Si l'on montre qu'ils ont même rayon on aura donc montré que K_A, K_B et K_C sont sur Γ. C'est précisément le but de cette question dont la conclusion est, en norme : $\Omega K_A = \Omega A'$.

Dans le triangle HOA, K_A est le milieu de $[HA]$ et Ω celui de $[OH]$ donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\overrightarrow{\Omega K_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

D'autre part, on a $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$. En introduisant par relation de Chasles O dans le membre de gauche et Ω dans celui de droite il vient $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{G\Omega} - 2\overrightarrow{\Omega A'}$.

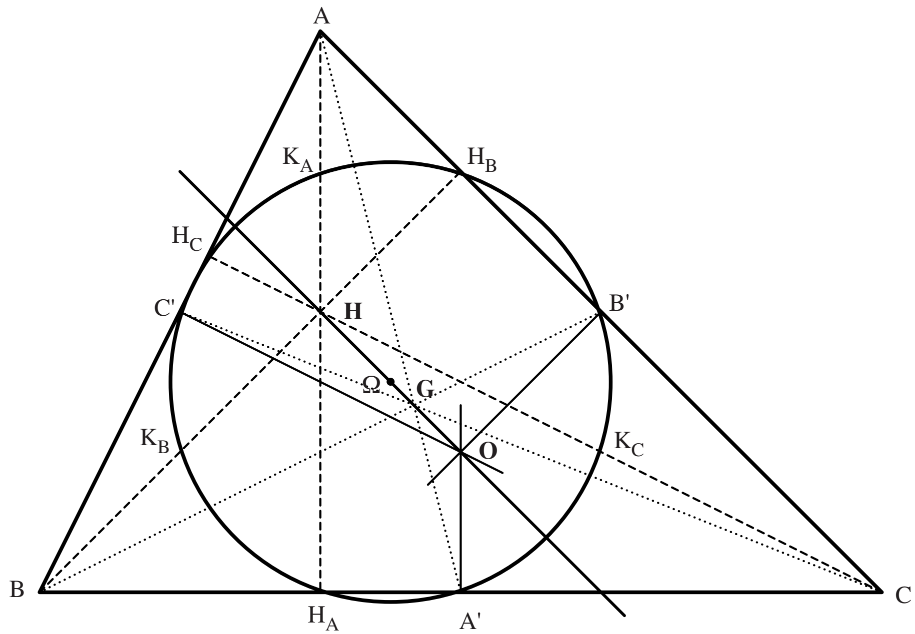
Or on a $\overrightarrow{\Omega O} = 3\overrightarrow{\Omega G}$, d'où l'on tire $\overrightarrow{GO} = 2\overrightarrow{\Omega G}$ et, en remplaçant, il vient $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{\Omega A'}$. On a donc

$$\overrightarrow{\Omega K_A} = -\overrightarrow{\Omega A'}$$

9. Il n'y a pratiquement rien à dire : les questions précédentes affirment que tous ces points sont sur Γ.

La question précédente montre que $\Omega K_A = \Omega A'$, *i.e.* que le cercle circonscrit à $K_A K_B K_C$ et Γ ont même rayon. K_A, K_B et K_C sont donc bien sur Γ. En fait, on a même montré que K_A et A' sont des points de Γ diamétralement opposés (idem avec B et C).
Les neufs points en question sont tous sur le cercle Γ et sont donc cocycliques.

Le cercle Γ, qui contient ces points, est le cercle des neufs points du triangle, aussi appelé cercle d'Euler. Comme souvent, la paternité de sa découverte n'est pas rigoureusement établie et il est également appelé cercle de Feuerbach ou de Steiner.



Exercice 4.5 : Tétraèdre régulier

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$. Soit G son isobarycentre et H celui du triangle ABC.

1. Montrer que H, A et G sont alignés en précisant leurs positions relatives.

2. Montrer que (HD) est orthogonale au plan (ABC).

3. Exprimer HA, HB, HC, HD, GA, GB, GC et GD en fonction de a.

4. Calculer $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$; en déduire une mesure de l'angle $\widehat{AGB}$ en fonction d'arc-cosinus.

5. Application numérique : exprimer cet angle en degrés et minutes. Commenter.

1. Les points H et G sont définis par des relations vectorielles. Nous allons donc essayer d'obtenir une traduction vectorielle de l'alignement des points H, A et G en partant de la définition des barycentres et en se servant, comme toujours dans cette situation, de la relation de Chasles.

Par définition des isobarycentres on a les deux égalités :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

En introduisant H dans la première de ces relations il vient

$$4\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$$

ce qui, d'après la seconde relation, se simplifie en $4\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$, soit encore $\overrightarrow{HD} = 4\overrightarrow{HG}$. Ainsi, les points H, G et D sont alignés dans cet ordre, la longueur HD étant quatre fois plus grande que HG.

Encore une fois, comme dans l'exercice **4.3**, on voit que les relations vectorielles, combinées à l'usage de la relation de Chasles, permettent non seulement de montrer que des points sont alignés mais aussi de déterminer leurs positions relatives et les différents rapports de longueur.

2. Il suffit de montrer que $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires portés par le plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Pour calculer ces produits scalaires, nous verrons que la relation de Chasles est encore bien utile.

Calculons $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.
H étant l'isobarycentre du triangle équilatéral ABC son projeté orthogonal sur (AB) est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2/2$, d'où $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2/2$.

D'autre part, le triangle ABD étant équilatéral de côté a, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2/2$.

On a donc $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

On montre de même que $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ce qui montre que la droite (HD) est orthogonale au plan (ABC).

3. Certaines longueurs ont déjà été calculées. Pour les autres, n'oublions pas qu'il y a beaucoup de triangles rectangles dans ce problème : nous allons pouvoir utiliser le théorème de Pythagore.

• Calcul de HA, HB et HC :

Soit I le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. D'autre part, $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ donc, en introduisant I dans les deux derniers vecteurs par la relation de Chasles, $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} = \vec{0}$, on encore $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$; on a donc $HA = \frac{2}{3}AI$.
Le triangle ABC étant équilatéral le triangle ABI est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore on a donc $AB^2 = AI^2 + IB^2$ d'où :

$$\begin{aligned} AI^2 &= AB^2 - IB^2 \\ &= AB^2 - (BC/2)^2 \\ &= 3a^2/4 \end{aligned}$$

et finalement $AI = a\sqrt{3}/2$. On en déduit $HA = a\sqrt{3}/3$. Un raisonnement analogue montre que $HB = HC = HA$.
• Le triangle HAD est rectangle en H donc $AD^2 = AH^2 + HD^2$, soit $HD^2 = a^2 - a^2/3 = 2a^2/3$ et enfin $HD = a\sqrt{2/3}$.
• Le triangle AGH est rectangle en H donc $AG^2 = AH^2 + GH^2$. Or $AH = a\sqrt{3}/3$ et $GH = HD/4 = a\sqrt{2/3}/4$ d'où : $GA = a\sqrt{3/8}$. On montre de même que GB et GC ont cette valeur.
• $\overrightarrow{HD} = 4\overrightarrow{HG}$ donc $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{HG}$, soit $\overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{HG}$ d'où l'on tire $GD = 3HG = 3HD/4$. On en déduit $GD = a\sqrt{18/48} = a\sqrt{3/8}$: G est donc équidistant des quatre sommets du tétraèdre.

4. Ici encore nous allons exploiter la régularité de la figure : il y a beaucoup de triangles rectangles mais aussi de triangles équilatéraux… En ce sens cet exercice est donc beaucoup plus simple que les exercices **4.1** et **4.2** qui traitaient de triangles quelconques.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} &= (\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA})\cdot(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB})\\ &= GH^2+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}\end{aligned}$$

car (HB) et (HC) sont orthogonales à (HG).
On a vu que

$$GH = \frac{a}{4}\sqrt{2/3}$$

soit

$$GH^2 = a^2/24.$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = HA\times HB\times\cos(\widehat{AHB})\ ;$$

or cet angle est $2\pi/3$, car H est l'isobarycentre du triangle équilatéral ABC, donc d'après les calculs de HA et HB faits plus haut :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = -a^2/6.$$

On en déduit

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = a^2/24 - a^2/6 = -a^2/8.$$

D'autre part

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = GA\times GB\times\cos(\widehat{AGB}) = 3a^2\cos(\widehat{AGB})/8.$$

On en déduit $\cos(\widehat{AGB}) = -1/3$; cet angle étant mesuré entre 0 et π on en déduit

$$\widehat{AGB} = \text{Arccos}(-1/3).$$

On aurait aussi pu appliquer la formule d'Al-Kâshi dans le triangle AGB : $AB^2 = AG^2 + BG^2 - 2AG\cdot BG\cos(\widehat{AGB})$ ce qui, d'après les valeurs des longueurs AG et BG calculées plus haut, donne bien $\cos(\widehat{AGB}) = -1/3$; en fait, le calcul que nous avons fait plus haut n'est rien d'autre qu'une démonstration de cette formule à l'aide du produit scalaire !
Cependant, la manipulation d'expressions vectorielles est beaucoup plus souple et générale, c'est pourquoi nous l'avons préférée.

5. Numériquement on trouve $\widehat{AGB} = 109°28'$ a une minute d'angle près par défaut. On retrouve un résultat de la théorie VSEPR : il s'agit de l'angle entre les liaisons d'une molécule de type AX_nE_m pour $n + m = 4$.

> Attention aux applications numériques concernant les angles : il ne faut pas mélanger les radians et les degrés et donc vérifier avant tout calcul le réglage de votre calculatrice.

Exercice 4.6 : Plans dans l'espace

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère deux plans :
P_1, d'équation cartésienne $3x - 2y + z = 1$;
P_2, passant par le point A_2 de coordonnées $(1,2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1. Déterminer un point A_1 de P_1 et un vecteur normal $\vec{n}_1$ à ce plan.

2. Déterminer une équation cartésienne de P_2.

3. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

1. On demande un point absolument quelconque de P_1 : on peut le chercher par tâtonnements. Quant au vecteur normal, d'après le cours, ses coordonnées sont les coefficients des inconnues de l'équation.

Soient (x_1,y_1,z_1) les coordonnées du point A_1 cherché : alors $3x_1 - 2y_1 + z_1 = 1$. On peut chercher un tel point avec une ou plusieurs coordonnées nulles. Par exemple, on voit qu'on peut prendre $x_1 = y_1 = 0$ et $z_1 = 1$.

> Le point A_1 de coordonnées $(0,0,1)$ est élément de P_1.
> De plus, d'après le cours, le vecteur $\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ est normal à P_1.

2. Une équation cartésienne s'obtient en traduisant la définition du vecteur normal à l'aide d'un produit scalaire.

> Un point $M(x,y,z)$ est élément de P_2 si, et seulement si, $\overrightarrow{A_2M} \cdot \vec{n}_2 = 0$, *i.e.* :
>
> $$(x - 1) + 2(y - 2) - 2(z - 1) = 0$$
>
> ou encore :
>
> $$x + 2y - 2z = 3$$
>
> qui est l'équation cherchée.

3. Un vecteur directeur de D est orthogonal aux vecteurs normaux à P_1 et P_2 donc est colinéaire à leur produit vectoriel.

On a :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Ce vecteur n'étant pas nul, les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles et se coupent donc selon une droite, ce qui justifie la question.
De plus, tout vecteur normal à P_1 ou à P_2 est normal à D : un vecteur directeur de D est donc colinéaire au vecteur précédemment calculé ; en particulier, $2\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$ lui-même dirige D.

Encore une fois, on demande un point quelconque d'un ensemble donné : on peut donc le chercher sous une forme simple et, si on trouve un point convenant, se contenter de la parachuter (la vérification étant immédiate).

Si $M(x,y,z)$ appartient à D, il appartient à P_1 et P_2 donc $3x - 2y + z = 1$ et $x + 2y - 2z = 3$.

Si on le cherche tel que $x = 0$, on a alors $-2y + z = 1$ et $2y - 2z = 3$: en additionnant il vient $z = -4$ puis $y = -5/2$.

Si l'on avait abouti à une contradiction, on aurait ainsi démontré qu'aucun point de première coordonnée non nulle n'était dans D ; on aurait alors pu essayer $y = 0$ ou $x = 1$... N'oublions pas que l'on ne cherche pas à déterminer tous les points de D mais seulement l'un quelconque d'entre eux : tout est permis du moment que cela permet d'en trouver un !

Bien sûr ce genre de recherche n'a sa place qu'au brouillon.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à $D = P_1 \cap P_2$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z & = & 1 \\ x + 2y - 2z & = & 3 \end{cases}$$

On vérifie aisément que le point de coordonnées $(0,-5/2,-4)$ convient.

Exercice 4.7 : Perpendiculaire commune

Soit $\mathcal{E}$ l'espace et $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct.
Soit D_1 la droite passant par le point A_1 de coordonnées (1,2,0) et dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{k}$.
Soit D_2 la droite passant par le point A_2 de coordonnées $(3,2,-1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_2 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
Soit Δ la droite perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

1. Donner un point et un vecteur directeur de Δ.
2. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
3. Donner un système d'équations cartésiennes de Δ.

D'après le cours, deux droites non parallèles de l'espace possèdent une unique perpendiculaire commune : nous commencerons donc par vérifier que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, même si ce n'est pas explicitement demandé par l'exercice.

De plus, le cours va plus loin : non seulement il affirme l'existence de cette perpendiculaire commune mais également qu'elle est dirigée par le produit vectoriel $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$; la moitié de la première question est donc résolue !

1. Pour montrer que les droites ne sont pas parallèles il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires ; le meilleur moyen de le faire est de calculer leur produit vectoriel : non seulement sa nullité caractérise la colinéarité des vecteurs mais en plus ce vecteur dirige Δ : nous allons ainsi faire d'une pierre deux coups.

Soit $\vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. Alors : $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
$\vec{v} \neq \vec{0}$ donc les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles : elles possèdent donc bien une unique perpendiculaire commune qui est, de plus, dirigée par $\vec{v}$.

Il faut désormais déterminer un point de Δ.

Pour cela, n'oublions pas que Δ coupe D_1 et D_2 : on cherchera donc plutôt directement le point d'intersection de Δ et D_1.

Si on le note B_1, on sait qu'alors $\overrightarrow{A_1B_1}$ est colinéaire à $\vec{u}_1$; ceci ne suffit pas à déterminer le point B_1.

De manière analogue, en notant B_2 le point commun à Δ et B_2, on aura $\overrightarrow{A_2B_2}$ colinéaire à $\vec{u}_2$.

Pour conclure, il ne restera plus qu'à écrire que $\overrightarrow{B_1B_2}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

Soit B_1 le point commun à D_1 et Δ ; on note (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées.

Alors le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ est colinéaire à $\vec{u}_1$: il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{u}_1$, *i.e.* $(x_1 - 1)\vec{i} + (y_1 - 2)\vec{j} + z_1\vec{k} = \lambda(\vec{i} + \vec{k})$, ce qui fournit le système

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 1 & = & \lambda \\ y_1 - 2 & = & 0 \\ z_1 & = & \lambda \end{array}$$

dont les inconnues sont λ et les trois coordonnées de B_1.

Il y a quatre inconnues mais seulement trois équations : il n'est pas possible de résoudre ce système.

De même, soit B_2 le point d'intersection de D_2 et Δ et (x_2, y_2, z_2) ses coordonnées.

Le vecteur $\overrightarrow{A_2B_2}$ étant colinéaire à $\vec{u}_2$ il existe un réel μ tel que $\overrightarrow{A_2B_2} = \mu\vec{u}_2$ soit :

$$(x_2 - 3)\vec{i} + (y_2 - 2)\vec{j} + (z_2 + 1)\vec{k} = \mu(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

d'où l'on tire le système

$$\begin{array}{rcl} x_2 - 3 & = & \mu \\ y_2 - 2 & = & \mu \\ z_2 + 1 & = & -\mu \end{array}$$

On a $\overrightarrow{B_1B_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$. On peut désormais exprimer ce vecteur en fonction uniquement de λ et μ, puis écrire qu'il est colinéaire à $\vec{v}$: ceci permettra de déterminer λ et μ, puis les coordonnées des points B_1 et B_2.

On a donc

$$\overrightarrow{B_1B_2} = (-\lambda + \mu + 2)\vec{i} + \mu\vec{j} + (-\lambda - \mu - 1)\vec{k}.$$

Ce vecteur étant colinéaire à $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ il existe un réel α tel que $\overrightarrow{B_1B_2} = \alpha\vec{v}$, d'où un dernier système :

$$\begin{array}{rcl} -\lambda + \mu + 2 & = & -\alpha \\ \mu & = & 2\alpha \\ -\lambda - \mu - 1 & = & \alpha \end{array}$$

que l'on peut résoudre sans problème : on obtient

$$\begin{cases} \alpha & = & -1/2 \\ \lambda & = & 1/2 \\ \mu & = & -1 \end{cases}$$

d'où les coordonnées de B_1 : $(3/2, 2, 1/2)$ et de B_2 : $(2, 1, 0)$.

Nous avons fait un peu mieux que ce qui était demandé : nous avons simultanément trouvé deux points de Δ, bien qu'un seul aurait suffit.

2. La représentation paramétrique n'est qu'une réécriture de la description par vecteur directeur : plus précisément, on traduit la colinéarité.

Un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient à Δ si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{B_2M}$ est colinéaire à $\vec{v}$, condition qui peut s'écrire : il existe un réel γ tel que $\overrightarrow{B_2M} = \gamma\vec{v}$.

En écrivant les coordonnées on obtient la représentation paramétrique cherchée :

$$\begin{cases} x = 2-\gamma \\ y = 1+2\gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \\ z = \gamma \end{cases}$$

3. On cherche deux plans dont l'intersection est égale à Δ.

Il est aisé de voir quels plans on va prendre : P_1 le plan contenant D_1 et Δ et P_2 celui contenant D_2 et Δ.

En effet, D_1 et Δ étant sécantes mais non confondues il existe bien un unique plan les contenant toutes les deux ; l'existence de P_2 se démontre de même.

De plus, par définition, Δ est contenue dans $P_1 \cap P_2$.

Enfin, les trois droites D_1, D_2 et Δ n'étant pas coplanaires, P_1 n'est pas parallèle à P_2 ; ainsi, leur intersection est bien réduite à la droite Δ.

Afin de déterminer des équations cartésiennes de ces plans, il suffira de trouver un point et un vecteur normal pour chacun.

Commençons par déterminer un point et un vecteur normal à chacun de ces plans.

• Les droites Δ et D_1 étant sécantes mais non confondues, il existe un unique plan P_1 qui les contient toutes les deux.

De plus, $B_1 \in P_1$ car, par définition, B_1 est élément à la fois de Δ et D_1. Enfin, un vecteur normal à P_1 est en particulier normal à Δ et D_1, donc orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{u}_1$, donc colinéaire à $\vec{v} \wedge \vec{u}_1$.

Or

$$\vec{v} \wedge \vec{u}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Le vecteur $\vec{u}_2$ est non nul et colinéaire au vecteur précédent donc est normal à P_1.

• De même les droites Δ et D_2 sont sécantes mais non confondues donc il existe un unique plan P_2 qui les contient toutes les deux.

De plus, par définition, $B_2 \in P_2$.

Soit $\vec{n}_2$ un vecteur normal à P_2 : il est également normal à Δ et D_2 donc orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$, *i.e.* colinéaire à $\vec{v} \wedge \vec{u}_2$.

Or

$$\vec{v} \wedge \vec{u}_2 = -3(\vec{i} + \vec{k}).$$

On a donc $\vec{u}_1$ normal à P_2.

Pour déterminer des équations cartésiennes de ces plans, n'oublions pas qu'ils sont définis à l'aide de vecteurs normaux : l'outil adapté est donc le produit scalaire.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à P_1 si, et seulement si, $\overrightarrow{B_1M} \cdot \vec{u}_2 = 0$, *i.e.* :

$$(x - 3/2) + (y - 2) - (z - 1/2) = 0$$

ou encore :

$$x + y - z = 3.$$

De même, M appartient à P_2 si, et seulement si, $\overrightarrow{B_2M} \cdot \vec{u}_1 = 0$, soit :

$$x + z = 2.$$

Un système d'équations cartésiennes de Δ est donc :

$$\begin{cases} x + y - z & = & 3 \\ x + z & = & 2 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier ce résultat : les coordonnées de B_1 vérifient bien ce système, celles de B_2 également.

Partie 2

Analyse

Plan

Plan

5

Nombres réels, Suites

Exercice 5.1 : Partie entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $0 \leqslant E(nx) - nE(x) \leqslant n - 1$.

2. En déduire $E(E(nx)/n) = E(x)$.

Étant donné un réel a, la partie entière de a est par définition l'unique entier relatif $E(a)$ vérifiant $E(a) \leqslant a < E(a) + 1$.

Aucune propriété de la partie entière n'est au programme : tout exercice la faisant intervenir se ramène donc à des manipulations de cet encadrement qui la définit.

1. Ici interviennent deux parties entières : celle de x et celle de nx. Par définition :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad E(nx) \leqslant nx < E(nx) + 1.$$

Afin de faire intervenir $nE(x)$ multiplions le premier encadrement par n. Comme $n > 0$, cette multiplication conserve les inégalités strictes d'où :

$$nE(x) \leqslant nx < nE(x) + n.$$

On en déduit l'encadrement opposé :

$$-nE(x) - n < -nx \leqslant -nE(x).$$

Ne pas soustraire des inégalités ! En effet, l'introduction d'un signe « – » renverse le sens des inégalités.
Pour ne pas commettre d'erreur, il faut prendre le temps d'une étape intermédiaire où l'on passe à l'opposé dans un encadrement avant d'additionner.

Par définition de la partie entière :

$$(1)\ E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad (2)\ E(nx) \leqslant nx < E(nx) + 1$$

d'où l'on tire

$$(3)\ x-1 < E(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (4)\ nx-1 < E(nx) \leqslant nx.$$

En multipliant l'encadrement (3) par $-n$ qui est strictement négatif on obtient :

$$(5)\ -nx \leqslant -nE(x) < n-nx.$$

Enfin, en additionnant les encadrements (4) et (5), il vient :

$$(6)\ -1 < E(nx)-nE(x) < n.$$

Pour conclure, nous pouvons utiliser un argument spécifique aux inégalités entre entiers : si a et b sont deux entiers tels que $a < b$, alors $a \leqslant b-1$.

Tous les termes de l'encadrement (6) étant entiers (car n l'est) on peut le réécrire :

$$(7)\ 0 \leqslant E(nx)-nE(x) \leqslant n-1.$$

On a utilisé le fait que n est entier pour transformer les inégalités strictes en les inégalités larges demandées.
D'autre part, on a utilisé le fait que n est strictement positif au début en multipliant l'encadrement définissant $E(x)$ par n sans changer le sens des inégalités.
Ainsi, on a bien utilisé complètement l'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soient $y = E(nx)/n$ et $p = E(y)$. Par définition, p est l'unique entier vérifiant $p \leqslant y < p+1$. Or $E(x)$ est un entier : pour montrer que $E(x) = p$ il suffit donc de montrer que $E(x) \leqslant y < E(x)+1$.

De l'encadrement obtenu à la question précédente on tire :

$$nE(x) \leqslant E(nx) \leqslant nE(x)+n-1$$

soit, n étant strictement positif :

$$E(x) \leqslant E(nx)/n \leqslant E(x)+1-1/n < E(x)+1$$

Comme $E(x)$ est un entier on a alors, par définition de la partie entière :

$$E(x) = E(E(nx)/n).$$

Exercice 5.2 : Borne supérieure

Soient a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \to [a,b]$ une application croissante. On pose $A = \{x \in [a,b] | \ x \leqslant f(x)\}$.

1. Justifier l'existence de $c = \sup(A)$ et montrer que $c \in [a,b]$.

2. Montrer par l'absurde que $f(c) \leqslant c$.

3. Montrer par l'absurde que $f(c) \geqslant c$.
Ainsi, $f(c) = c$: l'application f possède un point fixe.

La question « justifier l'existence de la borne supérieure de tel ensemble » est classique et simple : il suffit pour cela de montrer que l'ensemble en question est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Un théorème admis du cours énonce alors qu'il possède bien une borne supérieure.

Il faut garder à l'esprit qu'il est en général difficile de calculer explicitement une borne supérieure. Il faut donc bien lire l'énoncé : **démontrer l'existence d'un objet mathématique ne signifie pas que l'on est capable de l'écrire explicitement**. Autrement dit, lorsqu'un énoncé pose une question d'existence (d'une borne supérieure, d'une limite…) mais ne demande pas de valeur explicite, il ne faut pas forcément chercher à déterminer cette valeur.

Lorsque l'on a posé $c = \sup(A)$ on peut affirmer les deux choses suivantes, qui sont la traduction du fait que c est le plus petit des majorants de A :

• c est un majorant de A donc, pour tout $x \in A$, $x \leqslant c$;

• si c' est réel strictement inférieur à c, c' n'est pas un majorant de A, donc il existe $x \in A$ tel que $x > c'$.

La première propriété fournit une inégalité vérifiée par **tous** les éléments de A ; la seconde montre l'existence d'**un certain** élément de A vérifiant une inégalité.

Ces inégalités permettront de traiter les deux questions suivantes en n'oubliant pas qu'il y a une hypothèse supplémentaire sur l'application f : elle est supposée croissante.

1. La première partie de la question se rédige comme expliqué plus haut :

Vérifions que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

• $A \neq \emptyset$: en effet, $f(a) \in [a,b]$ donc $f(a) \geqslant a$, *i.e.* $a \in A$.

• A est majorée : en effet, par définition, $A \subset [a,b]$, donc A est majorée par b.

Ainsi, c est bien défini.

Il reste à montrer que $a \leqslant c \leqslant b$.

Pour cela, on utilise encore les deux propriétés de c :

• pour montrer qu'un réel est inférieur ou égal à c il faut d'abord se demander s'il est élément de A, auquel cas le résultat est clair, c étant un majorant de A ;

• pour montrer qu'un réel est supérieur ou égal à c, il suffit de montrer qu'il est un majorant de A (car c est le plus petit des majorants).

Le raisonnement que nous venons de faire en dit plus :
• $a \in A$ et c est un majorant de A, donc $a \leqslant c$;
• b est un majorant de A et c est le plus petit de ces majorants, donc $c \leqslant b$.
Ainsi, $a \leqslant c \leqslant b$ donc $c \in [a,b]$.

Ce résultat est important : cela a donc un sens de parler dans la suite de l'exercice de $f(c)$.

2. Récapitulons les propriétés des objets de l'énoncé :

i) tout élément x de A vérifie $x \leqslant c$ (*c est un majorant de A*) ;

ii) pour tout réel $c' < c$ il existe un élément x de A tel que $x > c'$ (c est le plus petit des majorants de A) ;

iii) tout élément x de A vérifie $f(x) \geqslant x$ (*définition de A*) ;

iv) pour tous x et y de $[a,b]$, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ (*f est croissante*).

Nous venons ainsi de résumer complètement toutes les données de l'énoncé. L'exercice doit donc pouvoir se résoudre en utilisant ces quatre points et rien qu'eux.

Il est demandé de raisonner par l'absurde : supposons $f(c) > c$ et cherchons, parmi les quatre points précédents, celui ou ceux que nous pouvons utiliser.

Les points *i* et *iii* sont inutiles : aucun élément de A n'apparaît dans l'intitulé de cette question.

Le point *ii* fait intervenir les réels strictements inférieurs à c et il n'y en a pas dans la question ici posée. Ainsi, il ne reste que le point *iv* pour débuter le raisonnement.

On prendra garde au fait que la fonction f est croissante mais pas nécessairement strictement croissante : autrement dit, l'inégalité stricte $c < f(c)$ implique l'inégalité large $f(c) \leqslant f(f(c))$ mais cette dernière peut être une égalité ; nous verrons que cela n'est pas gênant.

Supposons $c < f(c)$. f étant croissante on a alors $f(c) \leqslant f(f(c))$. Ceci montre que $f(c) \in A$.
Or c est un majorant de A donc $f(c) \leqslant c$. Ceci contredit l'hypothèse $f(c) > c$.
Ainsi, on a $f(c) \leqslant c$.

3. On souhaite ici montrer que $f(c) \geqslant c$, *i.e.* $c \in A$. Ceci n'est *a priori* pas évident ! En effet, la borne supérieure de A n'appartient pas forcément à A en général (on pourrait par exemple avoir $A = [a,c[$). Il y a donc bien quelque chose à démontrer.

L'énoncé demande ici de supposer $f(c) < c$. On voit ainsi apparaître clairement le point *ii*.

Supposons $f(c) < c$. Alors $f(c)$ n'est pas un majorant de A donc il existe un élément d de A tel que $f(c) < d$.
Comme $d \in A$ on a aussi, c étant un majorant de A : $d \leqslant c$.
On a également, par définition de A, $f(d) \geqslant d$.

Nous avons ainsi quatre inégalités : $f(c) < c, f(c) < d, d \leqslant c$ et $d \leqslant f(d)$. D'autre part, nous n'avons toujours pas utilisé le point *iv*, *i.e.* la croissance de *f*, qui nous permet de transformer ces inégalités en nouvelles inégalités.

De $d \leqslant c$ on tire, f étant croissante : $f(d) \leqslant f(c)$.
D'autre part, $d \leqslant f(d)$, d'où $d \leqslant f(c)$.
Ceci contredit l'inégalité $f(c) < d$: ainsi, $f(c) \geqslant c$.

Exercice 5.3 : Série harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la *série harmonique*.

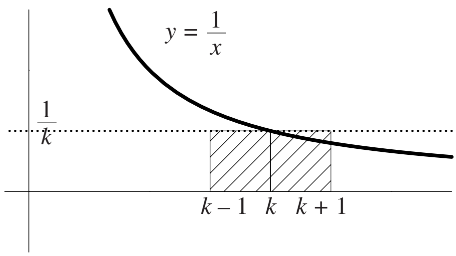
1. Soit un entier $k \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. On pourra commencer par illustrer graphiquement cet encadrement.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

3. Montrer que la suite de terme général $h_n - \ln(n)$ est convergente. On notera γ sa limite.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (h_{2n} - h_n)$.

1. Représentons graphiquement cet encadrement :



Sur le dessin, on voit que l'encadrement vient du fait que la courbe représentative de la fonction inverse se trouve, sur l'intervalle $[k,k+1]$, en-dessous de la droite d'équation $y = 1/k$ et que sur, l'intervalle $[k-1,k]$, elle est au-dessus de cette droite.

Plus précisément, chacun des rectangles hachurés est d'aire $1/k$. On voit que le rectangle de gauche a une aire inférieure à l'aire sous la courbe, qui est l'intégrale de droite de l'encadrement, alors que l'autre a une aire supérieure à l'aire sous la courbe, qui est l'intégrale de gauche.

Nous allons donc transformer une inégalité sur des fonctions (positions relatives de courbes) en une inégalité sur des intégrales (qui représentent des aires).

Pour $t \in [k,k+1]$ on a $k \leqslant t \leqslant k+1$ donc, en particulier, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

En intégrant cette inégalité de k à $k+1$ il vient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$$

car $\dfrac{1}{k}$ est une constante.

De même, pour $t \in [k-1,k]$, on a $k-1 \leqslant t \leqslant k$ donc, en particulier, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.

En intégrant cette inégalité de $k-1$ à k il vient :

$$\frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

car $\dfrac{1}{k}$ est une constante.

Nous avons bien utilisé le fait que $k \geqslant 2$ puisque nous avons considéré l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$: pour $k = 1$ ceci n'a pas de sens !

2. Afin de faire apparaître h_n on peut additionner les encadrements précédents. Cependant, ils ne sont valables que pour $k \geqslant 2$: nous allons donc d'abord les additionner pour k allant de 2 à n puis ajouter 1.

En additionnant les encadrements précédents pour $k = 2,\dots,n$ on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Le terme du milieu est $h_n - 1$.

D'autre part, on reconnaît dans les deux autres termes la relation de Chasles.

En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{2}^{3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{2}^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car l'extrémité supérieure de chaque intégrale est l'extrémité inférieure de la précédente.

De même, la somme de droite se réduit à :

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n+1) - \ln(2)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n).$$

L'encadrement précédent est donc :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant h_n - 1 \leqslant \ln(n).$$

Or

$$\ln(n) \leqslant \ln(n+1) \quad \text{et} \quad -1 \leqslant -\ln(2)$$

donc

$$\ln(n) - 1 \leqslant \ln(n+1) - \ln(2)$$

et enfin

$$\ln(n) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

3. La question précédente montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n - \ln(n) \in [0,1]$: cette suite est bornée. Il suffit donc d'étudier sa monotonie pour, si possible, appliquer le théorème de la limite monotone.

h_n étant défini par une somme nous allons évaluer le signe de la différence de deux termes successifs de la suite de terme général $h_n - \ln(n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(h_{n+1} - \ln(n+1)) - (h_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
D'autre part :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit, avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$ dans l'inégalité rappelée ci-dessus :

$$(h_{n+1} - \ln(n+1)) - (h_n - \ln(n)) \leqslant 0.$$

La suite de terme général $h_n - \ln(n)$ est donc décroissante.
Comme elle est par ailleurs minorée par 0, elle est convergente.

Le réel $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} (h_n - \ln(n))$ est la *constante d'Euler*, égale à $0{,}577$ à $0{,}001$ près. On notera que l'énoncé ne demande pas de calculer explicitement cette valeur, on se gardera donc de le faire. Le théorème de la limite monotone permet souvent de démontrer la convergence d'une suite mais ne permet pas de déterminer explicitement sa limite.

4. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n - \ln(n)) = \gamma$. Afin de faire intervenir h_{2n}, remarquons que d'après le théorème des suites extraites on a également $\lim\limits_{n\to\infty} (h_{2n} - \ln(2n)) = \gamma$. Il ne reste plus qu'à soustraire pour faire apparaître $h_{2n} - h_n$.

De $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n - \ln(n)) = \gamma$ on tire $\lim\limits_{n\to\infty} (h_{2n} - \ln(2n)) = \gamma$ car toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
En soustrayant ces deux limites, vu que $\ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} (h_{2n} - h_n - \ln(2)) = 0$ soit :

$$\lim_{n\to\infty} (h_{2n} - h_n) = \ln(2).$$

Exercice 5.4 : Étude d'une suite définie par une somme

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}.$$

2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = 2$.

3. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (on ne demande pas sa limite).

L'encadrement de u_n nous fournira, en divisant par $\sqrt{n}$, un encadrement de v_n : il est probable que l'argument adapté pour la deuxième question soit le théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes).

La troisième question ressemble à la deuxième à ceci près qu'elle demande de montrer qu'une suite est convergente sans calculer sa limite : le théorème le plus courant fournissant un tel résultat existentiel (la limite existe) mais non constructif (on ne trouve pas la valeur exacte de la limite) est le théorème de la limite monotone. Il faudra donc commencer la troisième question par l'étude de la monotonie de la suite de terme général w_n pour voir si les hypothèses de ce théorème sont vérifiées.

1. Pour plus de clarté, séparons l'étude des deux inégalités de l'encadrement.

Inégalité de droite

Procédons par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose H_n : « $u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ ».

- H_1 est clairement vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Alors $u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ donc

$$u_{n+1} \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On veut démontrer que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$: autrement dit, il suffit de montrer que $\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1}$. Afin de simplifier les expressions comportant des racines carrées commençons par réduire les termes du membre de gauche au même dénominateur :

$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour montrer que ceci est inférieur ou égal à $\sqrt{n+1}$ il suffit de démontrer que son numérateur est inférieur ou égal à $n+1$. Or on a $n^2-1 \leqslant n^2$, d'où $\sqrt{n^2-1} \leqslant n$ et enfin :

$$\frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1}.$$

D'autre part :

$$\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}}.$$

On a $n^2-1 \leqslant n^2$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{n^2-1}+1 \leqslant n+1$ d'où l'on tire, en reportant dans la précédente majoration de u_{n+1} :

$$u_{n+1} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1}.$$

Ainsi H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité de gauche

De même posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, K_n : « $2\sqrt{n+1}-2 \leqslant u_n$ ».

- K_1 est vraie : on a $\sqrt{2} \leqslant 3/2$ donc $2\sqrt{n+1}-2 \leqslant 1 = u_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que K_n soit vraie, *i.e.* $2\sqrt{n+1}-2 \leqslant u_n$. On a alors $2\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2 \leqslant u_{n+1}$.

On a $2\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}}$. On veut montrer que ceci est supérieur ou égal à $2\sqrt{n+2}$. Pour cela, montrons que leur différence est positive.
En réduisant au même dénominateur on a :

$$\frac{2n+3}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2} = \frac{2n+3-2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}}.$$

Il reste à déterminer le signe du numérateur, *i.e.* à comparer $2n+3$ et $2\sqrt{(n+1)(n+2)}$.

Comme ces deux réels sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés, *i.e.*

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 \quad \text{et} \quad 4(n+1)(n+2) = 4n^2 + 12n + 8.$$

Il est alors clair que $2n + 3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$, d'où :

$$\frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2}.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} = \frac{2n+3-2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}}.$$

D'autre part

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9 \geqslant 4n^2 + 12n + 8 = 4(n+1)(n+2)$$

donc

$$2n + 3 \geqslant 2\sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

Ainsi, $2\sqrt{n+2} \leqslant 2\sqrt{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant u_{n+1} + 2$, d'où :

$$2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant u_{n+1}$$

ce qui montre que K_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, K_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme annoncé nous allons diviser l'encadrement par $\sqrt{n}$ pour pouvoir utiliser le théorème des gendarmes. Il faut néanmoins faire attention à deux choses :

- s'assurer que l'on ne divise pas par 0, ce qui n'aurait aucun sens ;
- connaître le signe de la quantité par laquelle on divise : si elle est négative il faudra renverser le sens des encadrements.

Ici il n'y a aucun problème : n est un entier naturel non nul donc $\sqrt{n}$ est bien défini et strictement positif. Cependant n'oubliez jamais de préciser la raison pour laquelle vos calculs sont licites, même si ce n'est qu'en quelques mots en disant « $\sqrt{n} > 0$ donc… ».

En divisant l'encadrement

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

par $\sqrt{n}$, qui est strictement positif :

$$2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant \sqrt{1-\frac{1}{n}}+1.$$

On en déduit, d'après le théorème d'encadrement et les limites usuelles, que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$.

3. D'autre part on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= u_{n+1}-2\sqrt{n+1}-u_n+2\sqrt{n} \\ &= 2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$w_{n+1}-w_n = \frac{2\sqrt{n(n+1)}-(2n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Il suffit de déterminer le signe du numérateur, ce que l'on peut faire par un calcul analogue à celui de la question précédente :

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \geqslant 4n^2+4n = 4n(n+1)$$

donc

$$2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a, après réduction au même dénominateur :

$$w_{n+1}-w_n = \frac{2\sqrt{n(n+1)}-(2n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \geqslant 4n^2+4n = 4n(n+1)$$

donc

$$2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)}$$

et enfin

$$w_{n+1}-w_n \leqslant 0.$$

D'autre part :

$$w_n = u_n - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - 2 \geqslant -2.$$

La suite de terme général w_n est décroissante et minorée par -2 donc convergente.

On peut aborder ce type de problème comme dans l'exercice **5.3** pour établir les encadrements de départ. En effet, un raisonnement analogue montre que, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n - 1 \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

soit enfin

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) \leqslant u_n - 1 \leqslant 2(\sqrt{n} - 1)$$

puis, en remarquant que $-2 \leqslant 1 - 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{n} - 1 \leqslant \sqrt{n-1}$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}.$$

Inversement, les encadrements obtenus sur la série harmonique auraient pu être donnés par l'énoncé puis vérifiés par récurrence.

Exercice 5.5 : Irrationnalité de e

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Soit ℓ leur limite commune. On suppose que ℓ est rationnelle et on choisit deux entiers naturels a et b tels que $\ell = a/b$.

2. Montrer que $u_b < \ell < v_b$.

3. En déduire deux entiers naturels M et N tels que $N < M < N+1$. Conclure.

On peut montrer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que $\ell = e$.

Montrer que deux suites sont adjacentes est une application directe d'une définition du cours. La difficulté est ici calculatoire : il faudra manipuler simultanément le symbole Σ et des factorielles.

1. C'est une application directe d'une définition du cours : il faut démontrer que l'une des deux suites est croissante, l'autre décroissante et que la différence tend vers 0.

Pour la monotonie des suites on considérera les différences de termes successifs car elles sont définies par des sommes.

Étude de la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (et même strictement croissante).

Étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Les calculs sont ici un peu plus lourds, nous allons les détailler avant de passer à la rédaction finale. En particulier, nous allons effectuer étape par étape la réduction au même dénominateur des fractions avec les factorielles.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!}. \end{aligned}$$

Réduisons ces fractions au même dénominateur. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} &= \frac{n+1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} &= \frac{n(n+2)}{n(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$

car $n(n+2) - (n+1)^2 = -1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

soit, après simplification :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} < 0.$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite de terme général v_n est donc décroissante et même strictement décroissante.

La dernière étape, comme souvent, ne pose pas de problème :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$.
- Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. La conclusion du théorème des suites adjacentes fournit l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout entier naturel non nul n. Pour montrer que les inégalités sont en fait strictes on peut raisonner par l'absurde en supposant que ce sont des égalités.

D'après le théorème des suites adjacentes on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Supposons que $u_b = \ell$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement croissante on aurait alors $u_{b+1} > u_b = \ell$, ce qui contredit $u_{b+1} \leqslant \ell$.

Ainsi, $u_b < \ell$. L'inégalité $v_b > \ell$ se montre de la même manière.

3. La question précédente donne l'encadrement $\displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} + \frac{1}{b\cdot b!}$.

Il s'agit en fait d'un encadrement entre fractions : pour aboutir à un encadrement entre entiers il suffit donc de le multiplier par un entier bien choisi.

On remarque que les dénominateurs apparaissant dans les sommes se divisent les uns les autres : $0!, 1!, \ldots, b!$.

Ainsi, en multipliant par $b!$, tous les termes seront des entiers.

L'encadrement précédent peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!} + \frac{1}{b\cdot b!}.$$

En multipliant ces inégalités par $b!$, qui est strictement positif, on obtient

$$\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!} < a(b-1)! < \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!} + \frac{1}{b}.$$

Or, pour tout entier naturel $k \leqslant b$, $\dfrac{b!}{k!}$ est un entier : c'est 1 si $k = b$ et le produit $(k+1)\cdots b$ si $k < b$.

Le membre de gauche est donc un entier naturel que nous noterons N.

Le membre du milieu est aussi un entier que nous noterons M.

On a alors, avec ces notations : $N < M < N + \dfrac{1}{b}$.

Comme $b \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{b} \leqslant 1$ d'où $M < N + 1$.

On a donc $N < M < N + 1$ avec M et N entiers : c'est absurde, car M serait alors un entier strictement compris entre deux entiers successifs.

L'hypothèse de départ, c'est-à-dire $\ell \in \mathbb{Q}$, est donc fausse : ℓ est irrationnel.

Lorsque vous aurez étudié les intégrales, vous pourrez montrer que $\ell = e$ en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre les points 0 et 1.

On obtient alors sans aucun calcul la majoration

$$|e - u_n| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e$ et fournit en plus un majorant explicite de la différence : par exemple, en prenant $n = 9$, elle montre que u_9 est une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

En deuxième année vous apprendrez à utiliser de manière systématique cette formule afin d'établir la convergence de suites de ce type.

Exercice 5.6 : Valeurs approchées de racines carrées

Soient deux réels strictement positifs $a \leqslant b$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites strictement positives définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & \text{et} \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} & \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (on pourra exprimer $v_n - u_n$ sous forme d'une fraction en u_{n-1} et v_{n-1}).

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, puis que leurs limites sont égales.

3. À l'aide du produit $u_n v_n$ déterminer la valeur de cette limite.

4. Application : donner des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

1. Le calcul est suggéré par l'énoncé : exprimer u_n et v_n en fonction de u_{n-1} et v_{n-1} puis mettre au même dénominateur. Afin que u_{n-1} ait un sens on supposera $n \geqslant 1$; le cas $n = 0$ se traitera à la main.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$v_n - u_n = \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2 - 4u_{n-1}v_{n-1}}{2(u_{n-1} + v_{n-1})}.$$

On reconnaît des identités remarquables :

$$(u_{n-1} + v_{n-1})^2 = u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}v_{n-1} + v_{n-1}^2$$

donc

$$\begin{aligned}(u_{n-1} + v_{n-1})^2 - 4u_{n-1}v_{n-1} &= u_{n-1}^2 - 2u_{n-1}v_{n-1} + v_{n-1}^2 \\ &= (u_{n-1} - v_{n-1})^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$v_n - u_n = \frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})} \geqslant 0.$$

On a donc bien $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, pour $n = 0$, c'est vrai par hypothèse.

2. Nous allons montrer que ces suites convergent par un argument de monotonie.

• Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$ qui est négatif d'après la première question : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

• D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2v_n}{u_n + v_n}$. Or, toujours d'après la première question, $2v_n \geqslant u_n + v_n$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

On aurait aussi pu calculer $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geqslant 0.$$

Pour une fois, la différence comme le quotient permettaient tous deux de conclure.

On poursuit en mimant la démonstration du théorème des suites adjacentes.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. Ces deux suites sont donc convergentes.

Enfin, en passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n\right)$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Notons ℓ cette limite commune.

Le théorème de la limite monotone affirme de plus que $\ell = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\ell = \inf\{v_n | n \in \mathbb{N}\}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

3. Les deux suites étant définies par une relation de récurrence, cherchons une relation entre $u_{n+1}v_{n+1}$ et u_nv_n.

Par définition :

$$\begin{aligned} u_{n+1}v_{n+1} &= \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= u_nv_n. \end{aligned}$$

Autrement dit, le produit de ces deux suites est constant !

On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$; on a donc, par récurrence immédiate, $u_n v_n = u_0 v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En passant à la limite : $\ell^2 = ab$.

Comme $\ell \geqslant 0$ il vient $\ell = \sqrt{ab}$.

4. Nous allons calculer les premiers termes des suites u_n et v_n avec $a = 1$ et $b = 2$: nous obtiendrons ainsi des encadrements de $\sqrt{2}$.

Notons qu'il est facile de calculer rapidement ces termes : en effet, on a ici $u_n = \dfrac{2}{v_n}$, ce qui permet de déterminer u_n à partir de v_n presque sans calcul.

De même, avec $b = 3$, on obtient des encadrements de $\sqrt{3}$.

n	u_n	v_n
0	1	2
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{24}{17}$	$\frac{17}{12}$
3	$\frac{816}{577}$	$\frac{577}{408}$
4	$\frac{941\,664}{665\,857}$	$\frac{665\,857}{470\,832}$

n	u_n	v_n
0	1	3
1	$\frac{3}{2}$	2
2	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{168}{97}$	$\frac{97}{56}$
4	$\frac{32\,592}{18\,817}$	$\frac{18\,817}{10\,864}$

Exercice 5.7 : Divergence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

On suppose que la suite de terme général $\sin(n)$ est convergente de limite ℓ.

1. En considérant la suite de terme général $\sin(n+1)$, montrer que la suite de terme général $\cos(n)$ est convergente. On note ℓ' sa limite.

2. À l'aide de formules de trigonométrie exprimer de différentes manières les limites des suites $(\sin(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de ℓ et ℓ'. En déduire les valeurs possibles de ℓ', puis montrer que $\ell = 0$ et $\ell' = 1$.

3. Conclure.

Comme l'indique le titre nous allons démontrer que la suite de terme général $\sin(n)$ est divergente. L'énoncé commençant par « supposons que cette suite converge », il s'agit en fait d'une démonstration par l'absurde.

Il est ici question de suites extraites (ou sous-suites). La propriété fondamentale est la suivante : toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite. C'est ce théorème qui servira à calculer les limites de $\sin(n+1)$, $\sin(2n)$ et $\cos(2n)$ quand n tend vers $+\infty$ en fonction de celles de $\sin(n)$ et $\cos(n)$.

1. La formule de trigonométrie

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

est évidemment à utiliser : on vous demande en effet de faire le lien entre $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $\sin(n+1)$, il suffit donc d'utiliser cette relation avec $a = n$ et $b = 1$.

On a, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$ d'où, $\sin(1)$ étant non nul :

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Or $\sin(n) \underset{n\to\infty}{\to} \ell$, donc $\sin(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} \ell$

et il vient $\cos(n) \underset{n\to\infty}{\to} \ell\,\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$.

2. Rappelons les formules de trigonométrie reliant $\sin(2n)$ et $\cos(2n)$ à $\sin(n)$ et $\cos(n)$:

$$\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n) \quad \text{et} \quad \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 = 1 - 2\sin^2(n).$$

On demande d'établir plusieurs expressions de la limite d'une même suite. Ceci permettra d'établir des équations dont ces limites sont solutions en invoquant le théorème d'unicité de la limite : toutes les expressions obtenues pour la limite d'une suite donnée sont nécessairement égales.

$(\sin(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Elle a donc la même limite ℓ.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin(2n) = 2\sin(n)\cos(n)$; on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n) = 2\ell\ell'$.

La limite d'une suite convergente étant unique, on a donc $\ell = 2\ell\ell'$.

De même, $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et tend donc également vers ℓ'.

D'autre part, la relation $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n) = 2\ell'^2 - 1$ et l'unicité de la limite donne $\ell' = 2\ell'^2 - 1$.

Si on avait plutôt utilisé la relation $\cos(2n) = 1 - 2\sin^2(n)$ on aurait obtenu $\ell' = 1 - 2\ell^2$.

À ce stade on ne connaît ni ℓ ni ℓ'. Pour déterminer ℓ' nous allons utiliser la seule des trois relations précédentes qui ne fait pas intervenir ℓ.

Nous venons de voir que $\ell' = 2\ell'^2 - 1$: ℓ' est donc racine de l'équation $2z^2 - z - 1 = 0$. Un calcul simple montre que ses racines sont $-1/2$ et 1, donc $\ell' \in \{-1/2, 1\}$.

Déterminons les valeurs possibles de ℓ en utilisant la relation $\ell = 2\ell\ell'$. Si $\ell' = 1$, on a alors $\ell = 2\ell$, soit $\ell = 0$. Si $\ell' = -1/2$, il vient $\ell = -\ell$ et encore une fois $\ell = 0$. Ainsi, on a $\ell = 0$.

La dernière relation, $\ell' = 1 - 2\ell^2$, montre alors que $\ell' = 1$.

On aurait pu procéder autrement en partant de $\ell' = 1 - 2\ell^2$ pour calculer ℓ sachant que $\ell' \in \{-1/2, 1\}$ mais cela n'aurait pas permis de conclure immédiatement. En effet, si $\ell' = -1/2$, on en déduit $\ell^2 = 3/4$ et, si $\ell' = 1$, $\ell^2 = 0$, d'où $\ell \in \{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\}$. Il faut alors de toutes façons considérer la relation $\ell = 2\ell\ell'$ pour conclure que $\ell = 0$.

3. Chacune des deux premières questions permettait d'établir des relations entre ℓ et ℓ' ou de déterminer les valeurs éventuelles qu'elles pouvaient prendre ; il n'y a plus qu'à comparer ces résultats pour constater qu'ils sont incompatibles, ce qui achèvera la démonstration par l'absurde.

Reprenons la première question :

$$\ell' = \ell\,\frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)}.$$

Avec la deuxième question, on a $\ell = 0$ et $\ell' = 1$. En remplaçant ces valeurs dans la première relation il vient $1 = 0$, ce qui est absurde.
Nous avons donc démontré par l'absurde que la suite de terme général $\sin(n)$ est divergente.

Exercice 5.8 : Critère de comparaison logarithmique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à terme strictements positifs. On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\to} \ell \in [0,1[.$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right) u_n$.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Applications : étant donnés deux réels $\alpha > 0$ et $a > 1$ déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Cet exercice fournit un outil simple pour déterminer des limites de formes indéterminées telles que celles présentées dans la dernière question. Ce type d'argument sera utilisé couramment en deuxième année dans le cadre des séries entières.

1. L'énoncé de cette première question rappelle fortement la définition rigoureuse de la limite « avec ε ». Il s'agira donc de l'appliquer judicieusement à la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ce type de raisonnement étant nouveau on commencera la résolution par une discussion partant du résultat afin de « deviner » l'argument de départ.

Un tel procédé peut s'avérer utile mais n'est évidemment pas rigoureux : il a donc sa place au brouillon et la copie devra comporter la rédaction propre et rigoureuse partant des hypothèses de la question pour arriver à la conclusion.

Rappelons la définition de la limite sur l'exemple donné : étant donné un réel $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Cette dernière inégalité peut se traduire par l'encadrement $-\varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leqslant \varepsilon$ ou encore, en ajoutant ℓ à chaque membre, $\ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour obtenir une inégalité de la forme demandée, il suffirait d'avoir $\ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$, soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.

Ainsi, il suffit de considérer la définition de la limite, appliquée à la situation présente, pour une valeur particulière de ε.

Nous pouvons maintenant effectuer une rédaction rigoureuse.

Considérons le réel $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$. $\varepsilon > 0$ (car $\ell < 1$) donc il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Ceci peut également s'écrire : pour tout entier $n \geqslant N$, $\ell - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$, d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2}$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{\ell+1}{2} u_n$.

2. Si on avait $u_{n+1} = \dfrac{\ell+1}{2}\, u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue donc convergente de limite nulle.

Nous allons essayer de nous ramener à ce type d'argument en faisant apparaître une suite géométrique.

Par une récurrence immédiate on a :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant N,\ u_n \leqslant \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N.$$

Or $0 < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right) < 1$ (car $\ell \in [0,1[$) donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} = 0.$$

Comme d'autre part on a $u_n > 0$ par hypothèse le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Rien de particulier à signaler : il n'est ici demandé que d'appliquer le résultat précédent à des exemples explicites.

- Posons $u_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n} > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

qui tend vers $\frac{1}{a} < 1$ quand n tend vers $+\infty$: on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

• Posons $v_n = \frac{a^n}{n!} > 0$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a}{n+1}$$

qui tend vers $0 < 1$ quand n tend vers $+\infty$ donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

• Enfin, posons $w_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors

$$w_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

En simplifiant numérateur et dénominateur par $n+1$ on obtient

$$w_{n+1} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

d'où

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Or

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

On reconnaît un taux d'accroissement :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1 + 1/n) - \ln(1)}{1/n}$$

qui tend vers $\ln'(1) = 1$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{e}.$$

Enfin $\frac{1}{e} < 1$: on a donc $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

Cette dernière situation n'a rien à voir avec celle rencontrée dans le calcul de $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

• Dans le cas de u_n : on obtenait le quotient $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ où α est une **constante**, *i.e.* ne dépend pas de n. La limite de cette expression est alors bien 1 d'après les théorèmes du cours déjà rencontrés au lycée.

• Dans le cas de w_n : on a affaire au quotient $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$: **l'exposant dépend de** n. Dans ce cas, **aucun** théorème usuel ne s'applique directement. Il faut revenir aux exponentielles et logarithmes pour pouvoir conclure.

Exercice 5.9 : Critère spécial des séries alternées

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $u_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \ell$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell$.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Dans la première question, aucune hypothèse n'est faite sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: aucun des théorèmes classiques (encadrement, limite monotone, suites adjacentes) ne peut s'appliquer. Il va donc falloir revenir à la définition de la limite.

Autrement dit, nous allons démontrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Pour déterminer, à $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donné, un tel entier N, il faudra commencer par écrire les hypothèses, *i.e.* la définition de la limite pour les suites de termes généraux u_{2n} et u_{2n+1}. Nous aurons alors toutes les données pour conclure.

Comparée à cette première question technique, la deuxième question est sans difficulté : la première partie (montrer que deux suites sont adjacentes) est une vérification d'une définition du cours et la conclusion sera visiblement une application de la question précédente.

1. Fixons un nombre réel $\varepsilon > 0$.

Nous voulons démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Comme la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ nous savons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Ceci peut s'écrire de manière légèrement différente : pour tout entier **pair** $p \geqslant 2n_0$, $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi écrite, cette inégalité est de la forme souhaitée car elle fait intervenir $|u_p - \ell|$.

D'autre part, on sait également que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Ainsi, il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Comme précédemment nous pouvons reformuler ceci : pour tout entier **impair** $p \geqslant 2n_1 + 1$, $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a donc deux inégalités du type souhaité ; la première est valable pour les entiers pairs supérieurs ou égaux à $2n_0$ et la seconde pour les entiers impairs supérieurs ou égaux à $2n_1 + 1$.

Il nous faut déterminer un entier naturel N tel que cette inégalité soit vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à N, quelle que soit leur parité. Pour cela, il suffit de choisir un entier N qui soit à la fois supérieur ou égal à $2n_0$ et à $2n_1 + 1$. Par exemple, on pourra prendre $N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \ell$ il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ ou encore :

$$\text{pour tout entier pair } p \geqslant 2n_0, |u_p - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

De même, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$ donc il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ ou encore :

$$\text{pour tout entier impair } p \geqslant 2n_1 + 1, |u_p - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. Alors, si n est un entier $\geqslant N$, deux cas se présentent :

- si n est pair, n est un entier pair $\geqslant N \geqslant 2n_0$ donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ d'après la première inégalité ;
- si n est impair, n est un entier impair $\geqslant N \geqslant 2n_1 + 1$ donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ d'après la seconde inégalité.

Ainsi : pour tout entier $n \geqslant N$ on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

En conclusion, nous avons montré que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un certain entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ceci signifie exactement, par définition, que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que ces deux suites sont adjacentes est routinier : comme elles sont définies par des sommes on évaluera les différences de termes successifs pour étudier leur monotonie.

▶ Étude de la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$

> Le terme d'indice $n+1$ de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)}$, *i.e.* u_{2n+2}. Il faut prendre garde à ne pas se tromper d'indice : c'est l'entier n dans l'expression de u_{2n} qu'il faut remplacer par $n+1$.

On a :

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k.$$

Tous les termes de la première somme se simplifient avec un terme de la seconde sauf les deux derniers, *i.e.* $(-1)^{2n+1}a_{2n+1}$ et $(-1)^{2n+2}a_{2n+2}$.

Enfin, n'oublions pas que $(-1)^p = 1$ si p est pair et -1 si p est impair. En l'occurence, les deux termes dont il est question ci-dessus sont respectivement $-a_{2n+1}$ et a_{2n+2}.

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1}$ qui est négatif car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
>
> Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

▶ Étude de la monotonie de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

Même remarque : le terme d'indice $n+1$ de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. est $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$. Dans la différence $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ les termes restants sont $(-1)^{2n+2}a_{2n+2} = a_{2n+2}$ et $(-1)^{2n+3}a_{2n+3} = -a_{2n+3}$.

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} - u_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3}$ qui est positif car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
>
> Ainsi, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Enfin, il faut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

Cette différence est

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k.$$

Dans cette expression, tous les termes des sommes se simplifient sauf le dernier de la première somme, $(-1)^{2n+1}a_{2n+1}$, qui est égal à $-a_{2n+1}$ car $2n+1$ est impair.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} - u_{2n} = -a_{2n+1}$. Or $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$.
Ainsi, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

La première partie de la question est résolue. Notons que toutes les hypothèses ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et de limite nulle) ont bien été utilisées.
Il reste à utiliser le résultat de la première question.

Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes elles sont convergentes de même limite.
D'après la première question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Ceci montre en particulier la convergence des suites très classiques de termes généraux $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\dots$

La valeur exacte de la limite de telles suites peut être difficile voire impossible à calculer mais dans certains cas favorables l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à une fonction bien choisie permet de conclure.
Les séries entières et les séries de Fourier, au programme de deuxième année, permettent également parfois de déterminer certaines de ces valeurs.

Exercice 5.10 : Suite récurrente

Cet exercice utilise des résultats du cours sur les fonctions : continuité et dérivabilité.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n).$$

1. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\cos(\ell)$. Montrer que $\ell \in [0,1]$.

2. Montrer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Cet exercice est très classique. À terme vous devrez être capable de résoudre ce type de problème sans indication.

1. Le théorème dédié à ce type de résultat est le théorème des valeurs intermédiaires que nous allons appliquer à la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x) - x$.

Plus précisément, il y a deux choses à montrer :

• dans un premier temps, l'étude de cette fonction sur $\mathbb{R}$ montrera l'existence et l'unicité de ℓ ;

• dans un deuxième temps, nous affinerons le résultat en montrant que $\ell \in [0,1]$ en appliquant à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires sur ce segment.

• Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) - 1$.

Comme $|\sin| \leqslant 1$, f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$: f est donc strictement décroissante.

De plus, cos est bornée sur $\mathbb{R}$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc au moins une fois.

f étant strictement décroissante, elle ne peut s'annuler plus d'une fois : il existe donc un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = 0$.

• De plus, $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(1) = \frac{1}{2}\cos(1) - 1 < 0$: f s'annule donc en un point de $[0,1]$.

Vu que ℓ est l'unique réel tel que $f(\ell) = 0$ on a donc $\ell \in [0,1]$.

2. Nous allons déterminer une majoration explicite de $|u_n - \ell|$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à une fonction bien choisie.

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n)$ peut s'écrire $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est la fonction définie pour x réel par $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.

On a alors, de plus, $g(\ell) = \ell$. Ainsi, nous pouvons établir une relation entre $|u_{n+1} - \ell|$ et $|u_n - \ell|$:

$$|u_{n+1} - \ell| = |g(u_n) - g(\ell)| \leqslant M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|g'|$ sur $\mathbb{R}$, par exemple $\frac{1}{2}$.

On voit alors qu'une récurrence permettra de montrer que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$. La suite de terme général u_n vérifie donc la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n).$$

De plus, par définition de ℓ : $g(\ell) = \ell$.

Enfin, g est dérivable et, pour tout réel x, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$ ».

- H_0 est clairement vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie.

Alors :

$$|u_{n+1} - \ell| = |g(u_n) - g(\ell)|$$

g' étant majorée en valeur absolue par $\frac{1}{2}$ on en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g(u_n) - g(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

et enfin, en utilisant H_n, il vient

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \ell|$$

donc H_{n+1} est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci montre, en particulier, que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

En fait, nous avons même obtenu une majoration explicite de la distance entre u_n et ℓ.

Par exemple, si $u_0 = 1$, on a $|u_0 - \ell| \leqslant 1$; en prenant $n = 10$, on a $2^{10} = 1024 > 1000$ d'où $|u_{10} - \ell| < 0{,}001$.

Exercice 5.11 : Étude d'une suite définie implicitement

Cet exercice nécessite le cours sur les fonctions, les développements limités et les équivalents.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ tel que $x_n = \tan(x_n)$. Montrer que $x_n \sim n\pi$.

2. Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - n\pi)$. On pourra introduire la fonction arctangente.

3. Déterminer un équivalent simple de $x_n - (n\pi + \ell)$.

Une telle suite est dite définie implicitement car sa définition n'a rien d'explicite : on n'a aucune formule permettant de calculer x_n en fonction de n ni même de relation de récurrence pour calculer les termes de proche en proche.

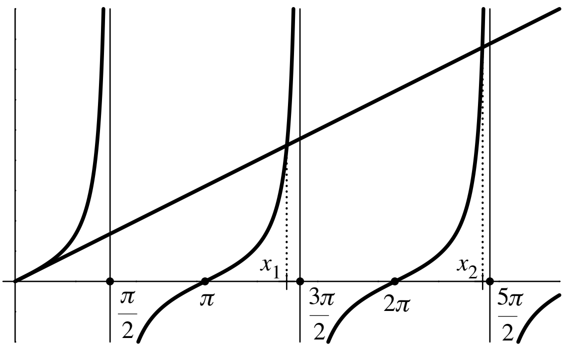
Il n'y a pas de méthode générale au programme pour étudier ce type de suite ; il faut se contenter de suivre la démarche proposée par les questions de l'énoncé. En général on n'obtiendra pas d'expression exacte de x_n mais uniquement un équivalent ou un développement asymptotique.

Ceci se fait généralement en utilisant tout le cours d'analyse et notamment les développements limités et équivalents usuels : ces exercices sont donc plus difficiles car ils mobilisent plus de connaissances. Ils sont aussi plus intéressants pour vérifier que l'on a bien acquis toutes les notions du programme.

1. Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité d'un réel appartenant à un intervalle et vérifiant une certaine équation : la bonne démarche est d'étudier une fonction bien choisie.

On peut écrire la relation $x_n = \tan(x_n)$ sous la forme $\tan(x_n) - x_n = 0$. La question devient alors : montrer que l'application $x \mapsto \tan(x) - x$ s'annule une unique fois sur l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

Graphiquement :



Soit $f :]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) - x$.

f est continue sur l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$. De plus, $\lim_{x \to n\pi - \pi/2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to n\pi + \pi/2} f(x) = +\infty$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc au moins une fois sur $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$.

D'autre part, f est dérivable et, pour tout $x \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, $f'(x) = \tan^2(x)$. f' est donc positive et ne s'annule qu'en un seul point $(n\pi)$: f est donc strictement croissante et ne s'annule ainsi qu'au plus une fois.

En résumé : il existe un unique réel $x_n \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ tel que $f(x_n) = 0$, *i.e.* tel que $x_n = \tan(x_n)$.

Il est en général difficile de deviner un équivalent d'une telle suite. Cependant, l'énoncé donne ici le résultat : nous allons donc simplement vérifier qu'il est correct en montrant que le quotient $\dfrac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1.

Par définition on a $n\pi - \pi/2 \leqslant x_n \leqslant n\pi + \pi/2$ d'où, pour $n \geqslant 1$:

$$1 - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{x_n}{n\pi} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}.$$

D'après le théorème d'encadrement on a donc

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$$

soit encore

$$x_n \sim n\pi.$$

Bien sûr ceci est un peu frustrant : comment aurions-nous trouvé cet équivalent si l'énoncé ne l'avait pas donné ?

Ceci peut se faire de manière qualitative : la notion d'équivalent en mathématiques sert à traduire rigoureusement la notion de « suites du même ordre de grandeur ». Comme $n\pi - \pi/2 < x_n < n\pi + \pi/2$ on « voit » que, quand n est grand, x_n est « de l'ordre » de $n\pi$.

Ceci n'a rien de rigoureux mais fournit une idée du résultat qu'on peut ensuite simplement vérifier comme cela a été fait ci-dessus.

2. L'unique difficulté dans la manipulation des fonctions circulaires réciproques concerne leur ensemble de définition et d'arrivée.

Concernant l'arctangente rappelons que, si x est un réel, $\text{Arctan}(x)$ est par définition l'unique réel appartenant à $]-\pi/2,\pi/2[$ dont la tangente est x.

En particulier, $\text{Arctan}(\tan(\theta))$ n'est pas forcément égal à θ : c'est le réel $\varphi \in]-\pi/2,\pi/2[$ vérifiant $\tan(\varphi) = \tan(\theta)$, on a donc seulement $\varphi = \theta + k\pi$ pour un certain entier relatif k.

Enfin, il est simple de faire apparaître $x_n - n\pi$: la fonction tangente étant π-périodique et n entier on a $\tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$.

On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$.
De plus, $x_n - n\pi \in]-\pi/2,\pi/2[$ donc, par définition de la fonction arctangente : $x_n - n\pi = \text{Arctan}(x_n)$.
Comme $x_n \sim n\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Arctan}(x_n) = \pi/2$, d'où $\ell = \pi/2$.

3. Dans la question précédente nous avons utilisé une propriété de la fonction tangente pour faire apparaître $x_n - n\pi$ et obtenir l'égalité $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n)$.

On peut utiliser une autre propriété de cette fonction pour faire apparaître $x_n - n\pi - \pi/2$: $\tan(\pi/2 - \theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$ donc également, en utilisant le fait que la tangente est impaire, $\tan(\theta - \pi/2) = -\dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

Avec $\theta = x_n - n\pi$ on obtient une expression de $\tan(x_n - (n\pi + \pi/2))$ en fonction de $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$. Il n'y a plus alors qu'à injecter dans cette relation les résultats précédemment obtenus sur x_n.

En raisonnant comme précédemment on a :

$$\begin{aligned} x_n &= \tan(x_n) \\ &= \tan(x_n - n\pi) \\ &= -\frac{1}{\tan(x_n - (n\pi + \pi/2))}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\tan(x_n - (n\pi + \pi/2)) = -\frac{1}{x_n}.$$

Comme $\tan(h)$ est équivalent à h quand h tend vers 0 et $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - (n\pi + \pi/2)) = 0$ on a

$$\tan(x_n - (n\pi + \pi/2)) \sim (x_n - (n\pi + \pi/2)).$$

D'autre part, $x_n \sim n\pi$ donc

$$-\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}.$$

On en déduit :

$$(x_n - (n\pi + \pi/2)) \sim -\frac{1}{n\pi}.$$

Avec les notations de Landau ceci s'écrit également

$$x_n = n\pi + \pi/2 - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).$$

Si l'on connaît la formule (hors-programme mais exercice classique) $\text{Arctan}(u) + \text{Arctan}(1/u) = \pi/2$ pour $u > 0$ on peut également traiter cette dernière question de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_n - (n\pi + \pi/2) &= \text{Arctan}(x_n) - \pi/2 \\ &= -\text{Arctan}(1/x_n). \end{aligned}$$

Or $\text{Arctan}(h)$ est équivalent à h quand h tend vers 0 et $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ donc

$$-\text{Arctan}(1/x_n) \sim -\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}.$$

Pour démontrer la formule dont il est question, étudiez la fonction $u \mapsto \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}(1/u)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en prenant bien garde au fait qu'elle n'est pas définie en 0 ; on trouve alors qu'elle est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

6 Fonctions continues

Exercice 6.1 : Trois théorèmes de point fixe pour des applications continues

Les trois questions sont indépendantes.
Chacune donne une condition suffisante pour qu'une application f possède un point fixe, *i.e.* un élément x de son ensemble de définition tel que $f(x) = x$.

1. Soient $S = [a,b]$ un segment et f une application continue de S dans lui-même. Montrer qu'il existe un élément c de S tel que $f(c) = c$.

2. Soit f une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose plutôt f croissante ?

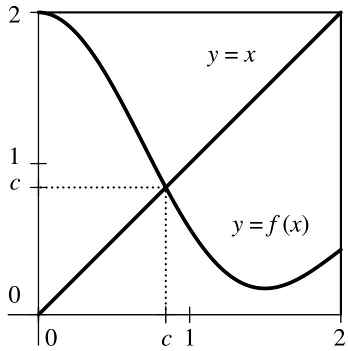
3. Soient $k \in [0,1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est k-lipschitzienne, *i.e.* : pour tous réels x et y, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

Les fonctions introduites par l'énoncé sont continues sur un intervalle et on souhaite démontrer l'existence d'un élément de cet intervalle vérifiant une certaine relation. C'est la situation courante où le théorème des valeurs intermédiaires sera appliqué.

Afin de l'utiliser, on introduira une fonction auxiliaire dont les points d'annulation seront les solutions du problème posé.

1. Pour montrer qu'il existe $c \in S$ tel que $f(c) = c$, il suffit de montrer qu'il existe $c \in S$ tel que $f(c) - c = 0$. Cette remarque simple suggère la forme de la fonction auxiliaire à laquelle appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Graphiquement, avec $a = 0$ et $b = 2$, on peut avoir l'allure suivante :



Considérons l'application $g : S \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - x$.

g est continue comme différence de deux fonctions continues.

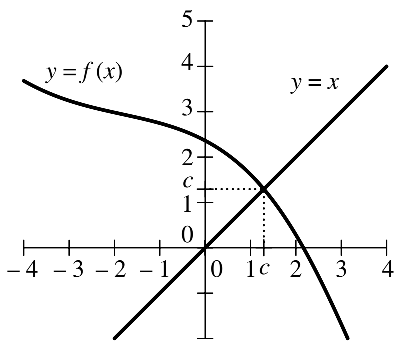
D'autre part, un réel $x \in S$ vérifie $f(x) = x$ si, et seulement si, $g(x) = 0$.

On a $g(a) = f(a) - a$. Or, par hypothèse, $f(a) \in [a,b]$ (car f est à valeurs dans $[a,b]$) donc $f(a) \geqslant a$: on a donc $g(a) \geqslant 0$. De même, $f(b) \in [a,b]$ donc $f(b) \leqslant b$ et $g(b) \leqslant 0$.

L'application g est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et les réels $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un élément c de $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$, *i.e.* $f(c) = c$.

2. Cette question est double : existence et unicité de c. Comme souvent dans ce cas, pour simplifier le raisonnement, il est souhaitable de dissocier ces deux questions dans la résolution.

Encore une fois il peut être intéressant de faire un dessin pour visualiser la propriété :



Existence : posons de la même manière $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}$. g est continue comme différence de fonctions continues et on veut monter qu'elle s'annule.

La situation est différente de celle de la première question : on n'a pas de renseignement sur les valeurs de g en des points particuliers. On peut en revanche s'intéresser aux limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}$ elle possède une limite en $+\infty$ qui est éventuellement $-\infty$ (théorème de la limite monotone pour les fonctions). On a donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

De même, f a une limite en $+\infty$ qui est éventuellement $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

L'ensemble $g(\mathbb{R})$ est un intervalle car $\mathbb{R}$ est un intervalle et g est continue (théorème des valeurs intermédiaires).

$g(\mathbb{R})$ n'est pas majoré (car g tend vers $+\infty$ en $-\infty$) et n'est pas non plus minoré (car g tend vers $-\infty$ en $+\infty$).

Le seul intervalle qui ne soit ni majoré ni minoré est $\mathbb{R}$: on a donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

g prend toutes les valeurs réelles, en particulier la valeur 0 : il existe un réel c tel que $g(c) = 0$ et on a alors $f(c) = c$.

Unicité : soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$. Nous voulons montrer que $c_1 = c_2$.

Pour cela, n'oublions pas qu'il y a une hypothèse de monotonie sur f : elle est décroissante. Nous allons donc introduire la relation d'ordre en supposant, par exemple, que $c_1 \leqslant c_2$.

Soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$.

Supposons $c_1 \leqslant c_2$. f étant décroissante, $f(c_1) \geqslant f(c_2)$ donc $c_1 \geqslant c_2$, d'où $c_1 = c_2$.

De même, si $c_1 \geqslant c_2$, on obtient que $c_1 = c_2$.

Dans tous les cas on a $c_1 = c_2$, ce qui montre l'unicité de c.

On remarque que l'hypothèse de décroissance de f a servi deux fois dans des situations complètement différentes : pour l'existence du point fixe, *via* le théorème de la limite monotone, et pour l'unicité.

Le résultat ne s'étend pas aux fonctions croissantes comme on le voit en considérant la fonction exponentielle.

De plus, même quand un point fixe existe, il n'est pas forcément unique : il suffit de prendre pour f l'application identité.

3. Rappelons que toute fonction lipschitzienne est continue. Nous allons suivre le même schéma que pour la question précédente : séparer l'existence et l'unicité et utiliser les limites à l'infini de $f(x) - x$ pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Existence : posons, pour x réel, $g(x) = f(x) - x$. g est continue comme différence de fonctions continues. Pour déterminer les limites de g à l'infini on peut transformer la valeur absolue en encadrement.

> On sait que, pour tous réels x et y, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
>
> • Avec $y = 0$ et $x \geqslant 0$ on obtient $|f(x) - f(0)| \leqslant kx$, soit $-kx \leqslant f(x) - f(0) \leqslant kx$ et enfin $f(0) - (1+k)x \leqslant g(x) \leqslant f(0) + (k-1)x$. Comme $k - 1 < 0$ le membre de droite tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
>
> • Avec $y = 0$ et $x \leqslant 0$ on a $|x| = -x$ d'où l'inégalité $|f(x) - f(0)| \leqslant -kx$ puis l'encadrement $f(0) + (k-1)x \leqslant g(x) \leqslant f(0) - (k+1)x$. Comme $k - 1 < 0$ le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

L'argument de la question précédente s'applique mot pour mot :

> L'ensemble $g(\mathbb{R})$ est un intervalle car $\mathbb{R}$ est un intervalle et g est continue (théorème des valeurs intermédiaires).
>
> $g(\mathbb{R})$ n'est pas majoré (car g tend vers $+\infty$ en $-\infty$) et n'est pas non plus minoré (car g tend vers $-\infty$ en $+\infty$).
>
> Le seul intervalle qui ne soit ni majoré ni minoré est $\mathbb{R}$: on a donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
>
> g prend toutes les valeurs réelles, en particulier la valeur 0 : il existe un réel c tel que $g(c) = 0$ et on a alors $f(c) = c$.

Unicité : soient c_1 et c_2 deux points fixes de f. La relation $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ est vraie pour tous les réels x et y. Cependant, les réels c_1 et c_2 sont particuliers car $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$: nous allons donc écrire cette relation avec $x = c_1$ et $y = c_2$.

> Soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$.
> Alors $|f(c_1) - f(c_2)| \leqslant k|c_1 - c_2|$ car f est k-lipschitzienne.
> Or $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$ d'où : $|c_1 - c_2| \leqslant k|c_1 - c_2|$.

Si $c_1 \neq c_2$ alors $|c_1 - c_2| > 0$ d'où, en divisant la relation précédente par $|c_1 - c_2|$: $k \geqslant 1$, ce qui contredit $k \in [0,1[$.

Ainsi, $c_1 = c_2$, ce qui montre que le réel c vérifiant $f(c) = c$ est unique.

Dans le cours sur les fonctions dérivées vous verrez que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $|f'(x)| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne (ce sera une conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis). Ceci permet de vérifier à peu de frais qu'une application (supposée dérivable) est k-lipschitzienne.

Par exemple, avec $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$, on a $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$: f est donc $\frac{1}{2}$-lipschitzienne et il existe donc un unique réel c tel que $\frac{1}{2}\cos(c) = c$. L'étude précise de ce point fixe est abordée dans l'exercice **5.10**.

Exercice 6.2 : Équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. On souhaite montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$. Montrer que ceci reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$.

3. Conclure.

Le fait que l'on demande de calculer d'abord les valeurs de f aux points entiers suggère de débuter par une récurrence.

Pour passer des valeurs de $f(x)$ avec x rationnel aux valeurs de $f(x)$ avec x réel quelconque on utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, nous savons que tout réel est limite d'une suite de rationnels. L'hypothèse de continuité sur f permettra, à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité, d'en déduire le résultat voulu.

1. Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

Le résultat étant donné par l'énoncé, posons directement l'hypothèse de récurrence. Afin d'alléger la rédaction posons $a = f(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose H_n : « $f(n) = an$ ».

- H_0 est vraie : nous devons vérifier que $f(0) = 0$. En prenant $x = y = 0$ dans la définition il vient $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, soit $f(0) = 0$.

L'astuce de calcul consistant à utiliser le fait que $0 = 0 + 0$ est à essayer systématiquement lorsque l'on souhaite résoudre une équation fonctionnelle faisant intervenir des additions.
Quand il y a des multiplications, c'est la relation $1 = 1 \times 1$ qui s'avérera souvent bien utile.
Vous rencontrerez couramment ce type de considération dans les démonstrations du cours d'algèbre.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie : autrement dit, on suppose que $f(n) = an$. Alors $f(n+1) = f(n) + f(1)$ (par définition de f). Or $f(n) = an$ (par hypothèse de récurrence) et $f(1) = a$ (c'est la définition de a) donc $f(n+1) = an + a = a(n+1)$. H_{n+1} est donc vraie.
- Ainsi, d'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout entier naturel n.

Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Nous avons ici besoin de calculer la valeur de f en des points connaissant sa valeur aux points opposés. La définition de f fait intervenir des sommes : il faut donc relier les opposés et les sommes, par exemple en utilisant le fait que $n + (-n) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geqslant 0$, on sait que $f(n) = an$.
Sinon, $-n \in \mathbb{N}$ donc $f(-n) = a \times (-n) = -an$.
D'autre part, $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = f(n) - an$, d'où $f(n) = an$.

Ce raisonnement peut paraître un peu laborieux mais il faut bien être conscient qu'il est nécessaire : l'équation fonctionnelle de départ ne faisant intervenir qu'une addition il faut jongler pour faire apparaître une soustraction. Dans la suite nous aurons le même problème avec des multiplications et des divisions qu'il faudra ramener à des sommes pour utiliser l'équation fonctionnelle de départ.

2. Afin de calculer la valeur de f aux points rationnels il faut relier les nombres rationnels aux nombres entiers en utilisant des sommes. En effet, la définition de f fait intervenir les sommes mais pas les produits : aucune hypothèse concernant les produits et quotients n'a été faite.

Soit $x \in \mathbb{Q}$: $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On a : $p = (p/q) + \cdots + (p/q)$ (q termes dans la somme) donc

$$f(p) = f((p/q) + \cdots + (p/q)) = f(p/q) + \cdots + f(p/q) \quad (q \text{ termes dans la somme})$$

i.e. $f(p) = qf(p/q)$.

Or $f(p) = ap$, car $p \in \mathbb{Z}$, donc $f(p/q) = ap/q$.

Ainsi, pour tout nombre rationnel x, $f(x) = ax$.

3. Comme annoncé nous allons obtenir les valeurs de f en un point quelconque à l'aide de deux caractérisations séquentielles : celle de la densité et celle de la continuité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tendant vers x.

On a donc, f étant continue sur $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x)$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = au_n$ (car $u_n \in \mathbb{Q}$). On a donc $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} au_n = ax$.

Par unicité de la limite, il vient $f(x) = ax$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

Nous avons déjà rencontré des équations fonctionnelles dans la section Équations différentielles. La démarche était radicalement différente.
Pour traiter une équation fonctionnelle, la méthode est dictée par l'hypothèse faite sur la fonction inconnue f :

- si f est supposée dérivable : utiliser la dérivation pour faire apparaître une équation différentielle vérifiée par f. Les solutions sont alors données par le cours. Des solutions parasites peuvent apparaître à cause de la dérivation, il faut donc ensuite une étape de synthèse (voir exercice **3.2**) ;
- si f est supposée continue : déterminer les valeurs de f aux points rationnels, en commençant par les entiers. Conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 6.3 : Cordes universelles

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit un entier $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un réel $c_n \in [0,1-1/n]$ tel que $f(c_n) = f(c_n + 1/n)$.

Comme précédemment nous allons modifier l'expression donnée afin de reformuler la question sous la forme : « montrer qu'il existe un réel $c_n \in [0,1-1/n]$ tel que $g(c_n) = 0$ », avec g une fonction continue. L'outil adapté sera alors le théorème des valeurs intermédiaires.

Il n'y a qu'un choix naturel : prendre $g(x) = f(x+1/n) - f(x)$ pour $x \in [0,1-1/n]$.

Il reste à montrer que g est continue (ce qui est clair) et qu'elle prend des valeurs positives et négatives afin de conclure par le théorème des valeurs intermédiaires.

Considérons les valeurs de g aux extrémités :

$$g(0) = f(1/n) - f(0) \quad \text{et} \quad g(1 - 1/n) = f(1) - f(1 - 1/n).$$

Nous avons bien une hypothèse sur $f(0)$ et $f(1)$ mais le problème est que l'on a ainsi fait apparaître $f(1/n)$ et $f(1 - 1/n)$ sur lesquels on ne sait absolument rien !

Afin de les faire disparaître, on peut leur additionner respectivement

$$g(1/n) = f(2/n) - f(1/n)$$

et

$$g(1 - 2/n) = f(1 - 1/n) - f(1 - 2/n)$$

mais on fait alors apparaître $f(2/n)$ et $f(1 - 2/n)$, etc.

Afin d'obtenir une somme « télescopique » où tous les termes se simplifient sauf ceux qui nous intéressent ($f(0)$ et $f(1)$) nous allons directement considérer

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \quad = \quad & (f(1/n) - f(0)) \\ & +(f(2/n) - f(1/n)) \\ & + \cdots \\ & +(f(1 - 1/n) - f(1 - 2/n)) \\ & +(f(1) - f(1 - 1/n)).\end{aligned}$$

Dans cette somme, les termes se simplifient deux à deux et il ne reste que $f(1) - f(0)$ qui est précisément nul par hypothèse.

Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,1 - 1/n] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x + 1/n) - f(x) \end{array}$$

qui est clairement continue.
On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) = f(1) - f(0) = 0.$$

Les $g(k/n)$ ne peuvent donc tous être de même signe strict.
Ainsi, il existe deux entiers distincts l et m (disons $l < m$) compris entre 0 et $n - 1$ tels que $g(l/n)$ et $g(m/n)$ sont de signes opposés.
g étant continue sur $[l/n,m/n]$ le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel $c_n \in [l/n,m/n]$ (*a fortiori* $c \in [0,1 - 1/n]$) tel que $g(c_n) = 0$.

Exercice 6.4 : Fonction continue ayant des limites finies à l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f possède des limites finies λ et μ en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.
Pour $x \in]-\pi/2,\pi/2[$ on pose $g(x) = f(\tan(x))$.

1. Montrer que g possède un prolongement par continuité à $[-\pi/2,\pi/2]$. On notera encore g cette fonction.

2. À l'aide de g, montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3. On suppose de plus que $\lambda = \mu$. Montrer que f atteint l'une de ses bornes. Atteint-elle forcément les deux ?

Il est ici question de fonctions continues, de fonctions bornées et de bornes atteintes. Le théorème adapté est donc le suivant : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Plus précisément, la fonction auxiliaire g est introduite de manière à pouvoir lui appliquer ce théorème et en déduire des renseignements sur la fonction f.

Rappelons que « atteindre ses bornes » signifie « posséder un minimum et un maximum » et que « atteindre au moins une de ses bornes » signifie « posséder un minimum ou un maximum ».

1. Cette question est une application directe du résultat du cours concernant le prolongement par continuité.

Tout d'abord, g est bien continue sur $]-\pi/2,\pi/2[$ comme composée de la fonction tangente, qui est continue sur $]-\pi/2,\pi/2[$, et de f qui est continue sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème de composition des limites : comme

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty$$

on a

$$\lim_{x\to\pi/2} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mu \in \mathbb{R}.$$

En posant $g(\pi/2) = \mu$ la fonction g ainsi obtenue est continue en $\pi/2$.
De même, en posant $g(-\pi/2) = \lambda$, la fonction g ainsi construite est continue en $-\pi/2$.

2. Suivons l'argumentation proposée au début de la solution : appliquons le théorème classique à g. On pourra ensuite revenir à f en utilisant le fait que, par définition, $f(t) = g(\mathrm{Arctan}(t))$ pour tout réel t.

La fonction g est continue sur le segment $[-\pi/2,\pi/2]$ donc bornée : il existe un réel positif A tel que, pour tout $x \in [-\pi/2,\pi/2]$, $|g(x)| \leqslant A$.
Considérons un réel quelconque t. Alors $f(t) = g(\text{Arctan}(t))$ donc $|f(t)| \leqslant A$.
Ceci montre que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Nous savons que, de plus, g atteint ses bornes : et notant m son minimum et M son maximum il existe deux éléments u et v de $[-\pi/2,\pi/2]$ tels que $g(u) = m$ et $g(u) = M$.

On peut se ramener à f comme précédemment en utilisant $f(\tan(x)) = g(x)$ mais il y a un problème : les valeurs prises par f sont celles prises par g sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Autrement dit, si u (ou v) est égal à $\pm\pi/2$, $f(\tan(u))$ n'a pas de sens. Il va donc falloir distinguer des cas selon que u ou v est égal à $\pm\pi/2$ ou non.

g étant continue sur $[-\pi/2,\pi/2]$ elle atteint ses bornes ; en notant m (resp. M) sont minimum (resp. maximum) il existe donc un élément u (resp. v) de $[-\pi/2,\pi/2]$ tel que $g(u) = m$ (resp. $g(v) = M$).
Distinguons trois cas.

- Si $u \in]-\pi/2,\pi/2[$: posons $t = \tan(u)$. On a alors $f(t) = g(u) = m$.
D'autre part, m est un minorant de f car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(\text{Arctan}(x)) \geqslant m$.
Ainsi, m est le minimum de f.
- Si $v \in]-\pi/2,\pi/2[$: posons $t = \tan(v)$. On a alors $f(t) = g(v) = M$.
D'autre part, M est un majorant de f car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(\text{Arctan}(x)) \leqslant M$.
Ainsi, M est le maximum de f.
- Sinon, u et v sont tous deux extrémités de $[-\pi/2,\pi/2]$.
Ainsi, $g(u)$ est égal à λ ou à μ, idem pour $g(v)$.
Or il a été supposé dans cette question que λ et μ étaient égaux : on a donc $g(u) = g(v)$, *i.e.* $m = M$.
Par définition de m et M on a, pour tout $x \in [-\pi/2,\pi/2]$, $m \leqslant g(x) \leqslant M$.
Comme $m = M$ la fonction g est donc constante ; comme $f = g \circ \text{Arctan}$ la fonction f l'est également et atteint donc son maximum et son minimum en tout point.

L'hypothèse $\lambda = \mu$ a bien été utilisée dans le dernier point.
Elle était bien essentielle : en prenant pour f la fonction arctangente, on voit que si $\lambda \neq \mu$ la fonction f peut ne posséder ni maximum ni minimum.

Afin de répondre à la question ouverte (f atteint-elle forcément ses deux bornes ?) examinons les conclusions de chacun des points.

On voit que si u et v sont tous deux éléments de $]-\pi/2,\pi/2[$, f atteint ses deux bornes ; il en va de même si ni u ni v ne sont éléments de cet intervalle ouvert.

Pour trouver un contre-exemple il faut chercher un cas où $u \in]-\pi/2,\pi/2[$ et $v = \pm\pi/2$ (ou le contraire). En prenant pour g la fonction valeur absolue on a bien cette situation (avec $m = 0$, $M = \pi/2$, $u = 0$ et $v = \pm\pi/2$).

Ceci suggère de considérer la fonction $f : x \mapsto |\text{Arctan}(x)|$.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |\text{Arctan}(x)|$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et possède, en $+\infty$ et $-\infty$, des limites qui sont égales (à savoir $\pi/2$).
f possède un minimum qui est 0, atteint pour $x = 0$.
Cependant, f n'a pas de maximum : en effet, la borne supérieure de f sur $\mathbb{R}$ est $\pi/2$ mais f ne prend pas cette valeur.
Ainsi, il est possible que la fonction f n'atteigne pas ses deux bornes.

Exercice 6.5 : Fonction continue injective

Soit I un intervalle et f une application continue sur I et injective. Le but de cet exercice est de montrer que f est strictement monotone sur I.
On fixe deux éléments a et b de I avec $a < b$. f étant injective, $f(a) \neq f(b)$. Supposons $f(a) < f(b)$.
Soient x et y deux éléments de I avec $x < y$. Pour $t \in [0,1]$ on pose $g(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$.

1. Montrer que g est continue sur I et ne s'annule pas.

2. Déterminer le signe de $g(0)$ puis de $g(1)$.

3. En déduire que f est strictement croissante.

4. Que dire si $f(a) > f(b)$?

1. Comme souvent la continuité de g est simple à vérifier car elle est construite par composition et différence de fonctions continues.

Il faut prendre garde aux notations : ici les lettres a, b, x et y désignent des réels fixés, la variable étant la lettre t.

Les applications $t \mapsto (1-t)a + tx$ et $t \mapsto (1-t)b + ty$ sont continues car affines. g est donc continue comme différence de composées de fonctions continues.

Pour montrer que g ne s'annule pas on peut raisonner par l'absurde : si g s'annule en un point u on obtient deux points où f prend la même valeur et l'hypothèse d'injectivité de f intervient alors naturellement.

Supposons qu'il existe $u \in [0,1]$ tel que $g(u) = 0$: on a alors

$$f((1-u)b + uy) = f((1-u)a + ux).$$

f étant injective il vient

$$(1-u)b + uy = (1-u)a + ux.$$

On en déduit

$$(1-u)(b-a) = u(x-y).$$

Or on a $b - a > 0$, $x - y < 0$, $u \geqslant 0$ et $1 - u \geqslant 0$: on a donc

$$(1-u)(b-a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u(x-y) \leqslant 0$$

d'où, ces deux quantités étant égales,

$$(1-u)(b-a) = u(x-y) = 0.$$

Comme $b - a \neq 0$ et $x - y \neq 0$ on en déduit $1 - u = u = 0$, soit $u = 0$ et $u = 1$: c'est absurde.
Ainsi, g ne s'annule pas sur $[0,1]$.

2. Il est ici question d'étudier le signe de g qui est continue sur un intervalle : nous utiliserons donc le théorème des valeurs intermédiaires.

Une fonction continue sur un intervalle prenant des valeurs de signes opposés s'annule (théorème des valeurs intermédiaires).

g est continue sur l'intervalle [0,1]. Comme elle ne s'annule pas, elle est de signe strict constant (contraposée de l'argument précédent) : $g(0)$ et $g(1)$ sont donc de même signe strict. Or $g(0) = f(b) - f(a) > 0$ par hypothèse donc $g(1) > 0$.

3. Par définition, $g(1) = f(y) - f(x)$. Nous venons donc de voir que $f(y) - f(x) > 0$.

On a donc démontré que, pour tous x et y de I tels que $x < y$, $f(x) < f(y)$: f est donc strictement croissante.

4. Il y a deux manières de traiter ce type de question :

- soit refaire tout ce qui précède en changeant le sens des inégalités, éventuellement avec des ellipses du type « par un calcul analogue », ce qui n'est ni efficace ni très élégant ;
- soit se ramener au cas précédent en introduisant une fonction auxiliaire qui vérifie les hypothèses du début de l'exercice.

On voit que $-f$ vérifie les hypothèses des questions précédentes et nous allons donc utiliser le résultat précédent appliqué à cette fonction.

L'application $-f$ est continue et injective sur I ; de plus, $-f(a) < -f(b)$. Ainsi, d'après ce qui précède, $-f$ est strictement croissante sur I, donc f est strictement décroissante sur I.

Nous avons donc démontré que, dans tous les cas, l'application f est strictement monotone sur I.

Exercice 6.6 : Fonction lipschitzienne et continuité uniforme (MPSI)

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne *(ce dernier point est accessible aux élèves de PCSI et PTSI)*.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ bien qu'elle soit continue.

1. Il y a deux propriétés à montrer : l'une « positive » (la fonction est uniformément continue) et l'autre « négative » (elle n'est pas lipschitzienne).

La notion de fonction lipschitzienne étant plus simple que la notion de continuité uniforme, nous allons commencer par elle.

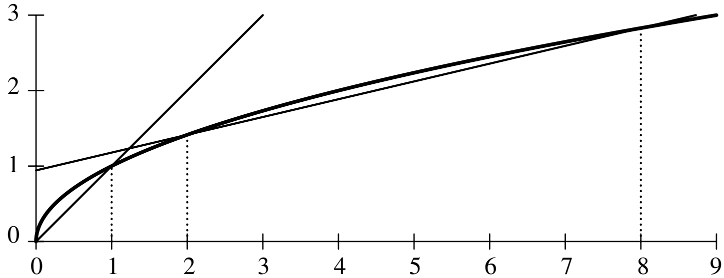
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ posons $f(x) = \sqrt{x}$.

***f* n'est pas lipschitzienne :** raisonnons par l'absurde.

Si f était lipschitizienne il existerait une constante k telle que, pour tous réels positifs x et y, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Autrement dit, pour $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$.

Géométriquement, ceci signifie que les pentes des sécantes à la courbe représentative de la fonction sont toutes, en valeur absolue, inférieures ou égales à k.

Cependant, il est clair que si les points x et y sont « proches » de 0 la pente de la sécante va devenir « grande ». Sur la figure suivante, nous avons tracé les deux sécantes correspondant aux choix $(x,y) = (0,1)$ et $(x,y) = (2,8)$.



Nous allons donc considérer le cas particulier $y = 0$ puis faire tendre x vers 0. Ainsi nous aurons les sécantes avec les plus grandes pentes et donc, probablement, notre contradiction.

Supposons qu'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x - y|.$$

Alors, en particulier, pour $y = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leqslant kx.$$

Pour $x > 0$ on a donc, en divisant par x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k.$$

Enfin, en considérant la limite quand x tend vers 0 :

$$+\infty \leqslant k$$

ce qui est absurde.
Ainsi, f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

On peut raisonner de manière légèrement différente : en fixant $x \neq 0$ et en faisant tendre y vers x on obtient $|f'(x)| \leqslant k$, *i.e.* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant k$, ce qui mène à la même contradiction.
Dans ce nouveau raisonnement nous avons en fait commencé par le passage à la limite, *i.e.* nous avons remplacé la condition sur les pentes des sécantes par une condition sur les pentes des tangentes.

***f* est uniformément continue :** cette question est plus délicate.

Avant de commencer, écrivons la conclusion que l'on souhaite obtenir : quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tous les couples (x, y) de réels positifs, si $|x - y| \leqslant \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
Nous devons donc, ε étant donné, trouver un réel $\eta > 0$ tel que l'on puisse passer de l'inégalité $|x - y| \leqslant \eta$ à $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \varepsilon$. La subtilité de la continuité uniforme est que ce réel η doit être le même pour toutes les valeurs de x et y.
Nous cherchons donc à introduire une relation entre $|x - y|$ et $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$.
La première chose qui vient à l'esprit est de reconnaître une différence de carrés :

$$|x - y| = |\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} + \sqrt{y}|.$$

Afin d'y voir plus clair, supposons $x \leqslant y$. Ceci n'influera pas le résultat puisqu'il y a des valeurs absolues dans tous les termes.
On a alors :

$$y - x = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})$$

soit

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}.$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $0 \leqslant y - x \leqslant y$ et donc

$$\sqrt{y - x} \leqslant \sqrt{y} \leqslant \sqrt{y} + \sqrt{x}.$$

Ainsi, on obtient : $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$.

Pour avoir $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$, il suffit donc d'avoir $y - x \leqslant \varepsilon^2$. Autrement dit, le choix $\eta = \varepsilon^2$ convient.

L'inégalité $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$ (en n'oubliant pas que $x \geqslant y$, faute de quoi on a seulement $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y - x|}$) peut aussi se lire comme l'inégalité classique : $\sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (en prenant $a = x$ et $b = y - x$).
Cette dernière vient du fait que $a + b \leqslant a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ en considérant ensuite la racine carrée.
Il est toujours profitable de connaître (ou, au moins, de savoir retrouver) ce type d'inégalité : cela permet de ne pas être bloqué par une expression avec des racines carrées.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \varepsilon^2 > 0$.
Soient x et y deux réels positifs tels que $|x - y| \leqslant \eta$. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer $x \leqslant y$.
Alors :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

De plus :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{y} \geqslant \sqrt{y - x}$$

d'où :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|} = \varepsilon.$$

En résumé nous avons démontré :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui signifie exactement, par définition, que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Comme précédemment, pour démontrer ce résultat négatif, nous pouvons tenter un raisonnement par l'absurde.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ posons $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et supposons que g soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que, si $|x-y| \leqslant \eta$, $|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* :

$$\frac{|y-x|}{xy} \leqslant \varepsilon.$$

Le problème est que l'on ne peut pas faire tendre x vers 0 sans précaution dans cette expression : **x et y ne sont pas tout à fait quelconques, ils doivent vérifier la relation** $|x-y| \leqslant \eta$. Une stratégie est donc de considérer des valeurs particulières de y pour éliminer cette variable et n'avoir plus que la seule variable x.

Pour cela, on peut prendre $y = x + \eta$: on a alors bien $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $|x-y| \leqslant \eta$ et l'inégalité ci-dessus devient la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\eta}{x(x+\eta)} \leqslant \varepsilon$$

dont on voit clairement qu'elle est absurde en faisant tendre x vers 0.

Enfin, on constate que le choix de ε est indifférent : on n'a pas besoin de vérifier ceci pour tout réel $\varepsilon > 0$, un seul suffit ; nous pouvons par exemple prendre $\varepsilon = 1$, ce qui allègera la rédaction.

Supposons que g soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leqslant 1.$$

En considérant un réel $x > 0$ quelconque et en posant $y = x + \eta$ on a bien $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $|y-x| \leqslant \eta$. Ainsi :

$$\frac{\eta}{x(x+\eta)} \leqslant 1.$$

Cette inégalité est vraie pour tout réel $x > 0$; en considérant la limite quand x tend vers 0 on aboutit à

$$+\infty \leqslant 1$$

ce qui est absurde.

Ainsi, g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que, si f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, on a les implications :

$$f \quad \text{lipschitzienne} \Rightarrow f \quad \text{uniformément continue} \quad \Rightarrow f \quad \text{continue.}$$

Les exemples ci-dessus montrent que les implications réciproques sont fausses. Cependant, avec des hypothèses supplémentaires, elles peuvent être vraies :

• si f est continue sur un **segment** alors elle est uniformément continue (théorème de Heine) ;

• si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **segment** alors elle est lipschitzienne (conséquence de l'inégalité des accroissements finis).

Il existe un certain nombre d'autres conditions suffisantes pour qu'une fonction soit lipschitzienne ou uniformément continue sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment ; cependant, seules les deux citées ici sont au programme.

Exercice 6.7 : Continuité uniforme et limite (MPSI)

Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout réel strictement positif t, la suite $(f(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

1. Soit un réel $h > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ et un entier naturel N tels que :

i) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $|x - y| \leqslant \delta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant h$;

ii) pour tout entier $n \geqslant N$, $|f(n\delta)| \leqslant h$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Dans l'hypothèse, on fait tendre l'entier n vers $+\infty$, le réel t ayant été précédemment fixé de manière arbitraire. Autrement dit, on suppose que des **suites** convergent vers 0.
Dans la conclusion, en revanche, c'est la **fonction** f qui tend vers 0.

1. On reconnaît ici deux définitions du cours : la continuité uniforme et la limite d'une suite. Il n'y a donc qu'à traduire correctement les hypothèses de l'énoncé pour avoir le résultat de cette question préliminaire.

Par définition de la continuité uniforme il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant h.$$

De plus, en prenant $t = \delta$ dans l'hypothèse de l'exercice : la suite de terme général $f(n\delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, par définition de la limite d'une suite, il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |f(n\delta)| \leqslant h.$$

Le réel δ et l'entier N ci-dessus conviennent donc.

2. Avant de commencer, écrivons le résultat auquel on souhaite arriver :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif A tel que, pour tout réel $x \geqslant A$,

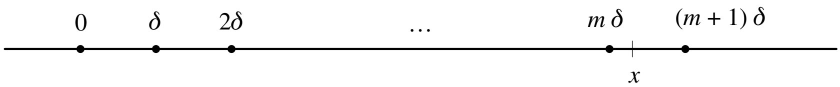
$$|f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Fixons donc un réel $\varepsilon > 0$ et cherchons un tel A.

D'après le deuxième point de la question précédente, en prenant $h = \varepsilon$, on a l'inégalité $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour les réels x de la forme $n\,\delta$ avec $n \geqslant N$. C'est presque ce que l'on souhaite : il faudrait juste obtenir une telle inégalité pour **tous** les réels x supérieurs ou égaux à $N\,\delta$, plutôt que de ne l'avoir que pour les réels de la forme $n\,\delta$, et on concluerait en prenant $A = N\,\delta$.

Les nombres de la forme $n\,\delta$, avec n entier, sont répartis de δ en δ. Ainsi, tout réel positif x est distant d'un tel nombre d'au plus δ. Plus précisément, à l'aide de la partie entière, on peut démontrer que pour tout réel positif x il existe un entier naturel m tel que $m\,\delta \leqslant x < (m+1)\,\delta$.

Graphiquement, sur la droite réelle :



On a alors $|x - m\,\delta| \leqslant \delta$ et donc, $|f(x) - f(m\delta)| \leqslant \varepsilon$.

Nous pouvons maintenant obtenir un renseignement sur $f(x)$: d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| = |f(x) - f(m\,\delta) + f(m\,\delta)| \leqslant |f(x) - f(m\,\delta)| + |f(m\,\delta)|$$

et ceci est inférieur ou égal à 2ε si $m \geqslant N$, *i.e.* si $x \geqslant N\,\delta$.

On aurait préféré une majoration par ε plutôt que 2ε pour obtenir exactement la définition du résultat demandé ; pour cela, on reprend tout à l'identique mais avec $h = \varepsilon/2$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ et posons $h = \varepsilon/2$.
Considérons le réel $\delta > 0$ et l'entier naturel N donnés par la première question.
Soit un réel $x \geqslant N\,\delta$ et posons $m = E(x/\delta)$.
On a alors :

$$m \leqslant \frac{x}{\delta} < m + 1$$

soit, comme $\delta > 0$:

$$0 \leqslant x - m\delta < \delta.$$

De plus :

$$|f(x)| = |f(x) - f(m\delta) + f(m\delta)| \leqslant |f(x) - f(m\delta)| + |f(m\delta)|.$$

Comme $|x - m\delta| \leqslant \delta$ on a $|f(x) - f(m\delta)| \leqslant h$.
Enfin, $\dfrac{x}{\delta} \geqslant N$ qui est un entier donc $m \geqslant N$ (car m est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{x}{\delta}$). Ainsi, $|f(m\delta)| \leqslant h$.
En conclusion :

$$|f(x)| \leqslant 2h = \varepsilon.$$

Résumons tout ce qui vient d'être dit à l'aide de quantificateurs et en notant $A = N\,\delta$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Par définition de la limite en $+\infty$ ceci signifie exactement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

7

Dérivation, développements limités

Exercice 7.1 : Applications du théorème de Rolle

Soient I un intervalle, f une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$.
On considère trois éléments a, b et x_0 de I tels que $a < x_0 < b$. Pour $x \in [a,b]$ on pose $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - (x-a)(x-b)A$, A constante réelle.

1. Montrer qu'on peut choisir A de sorte que $g(a) = g(x_0) = g(b)$.

2. En déduire, en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, qu'il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} + \dfrac{x_0-b}{2} f''(c)$.

C'est un exercice typique d'application du théorème de Rolle : pour démontrer un résultat sur f on introduit une fonction auxiliaire g à laquelle on applique une ou plusieurs fois ce théorème. C'est d'ailleurs par un tel procédé que l'on peut déduire l'égalité des accroissements finis du théorème de Rolle.

1. On voit sur la définition de g que $g(a) = g(b) = 0$: on souhaite choisir A tel que $g(x_0) = 0$.

Raisonnons par analyse-synthèse : si un tel réel A convient on a alors

$$f(x_0) - f(a) - (x_0-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - (x_0-a)(x_0-b)A = 0$$

donc

$$(x_0 - a)(x_0 - b)A = f(x_0) - f(a) - (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Or x_0 est distinct de a et de b donc on peut diviser l'égalité par $(x_0 - a)(x_0 - b)$, ce qui donne

$$A = \frac{1}{(x_0 - a)(x_0 - b)}\left(f(x_0) - f(a) - (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

Pour la rédaction, on se contentera de poser cette dernière formule, en n'oubliant pas de justifier qu'elle a un sens, et de vérifier qu'elle convient.

Il est clair que $g(a) = g(b) = 0$.
Posons
$A = \dfrac{1}{(x_0 - a)(x_0 - b)}\left(f(x_0) - f(a) - (x_0 - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$; ceci est licite car $x_0 - a$ et $x_0 - b$ ne sont pas nuls. On a alors clairement :

$$g(x_0) = 0 = g(a) = g(b).$$

Cette réponse peut paraître surprenante ! L'unique argument mathématique attendu est la justification de la division par $(x_0 - a)(x_0 - b)$, *i.e.* que ce réel n'est pas nul. Dans une telle situation il ne faut pas chercher à trouver une expression plus simple pour A : c'est précisément l'objet de la suite de l'exercice.

2. En appliquant le théorème de Rolle à g on obtiendra un ou plusieurs points où g' s'annule. Cependant, l'expression de g' fera intervenir f' alors que la réponse contient f'' : on appliquera donc à nouveau le théorème de Rolle à g' pour obtenir le résultat.

D'autre part, g vérifie bien les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a,b]$ mais on a mieux : elle les vérifie sur $[a,x_0]$ et $[x_0,b]$. Ainsi, on pourra appliquer deux fois le théorème de Rolle à g' sur deux segments distincts, ce qui fournira deux points où la dérivée s'annule ; on pourra alors appliquer le théorème de Rolle à g' entre ces deux points pour aboutir au résultat demandé.

g est continue sur $[a,x_0]$ et dérivable sur $]a,x_0[$; de plus, $g(a) = g(x_0)$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c_1 \in]a,x_0[$ tel que $g'(c_1) = 0$. Le même raisonnement sur $[x_0,b]$ montre qu'il existe un réel $c_2 \in]x_0,b[$ tel que $g'(c_2) = 0$.

Enfin, on a bien $c_1 < c_2$; g' est continue sur $[c_1,c_2]$, dérivable sur $]c_1,c_2[$ et $g'(c_1) = g'(c_2)$: d'après le théorème de Rolle il existe donc un réel $c \in]c_1,c_2[$ (*a fortiori* $c \in]a,b[$) tel que $g''(c) = 0$.
D'autre part on a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - (2x - a - b)A$$

d'où

$$g''(x) = f''(x) - 2A.$$

En particulier, pour $x = c$, il vient :

$$A = \frac{1}{2}f''(c).$$

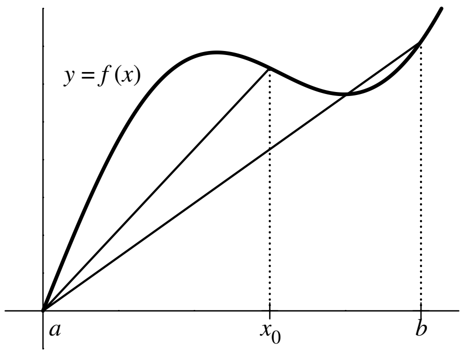
En remplaçant A par sa valeur dans la relation $g(x_0) = 0$ il vient

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}f''(c)$$

soit, en soustrayant $f(a)$ et en divisant par $x_0 - a$, qui n'est pas nul :

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{x_0 - b}{2}f''(c).$$

Voici une illustration graphique : les quotients considérés sont les pentes des deux droites, le résultat permet donc d'estimer la différence de ces pentes à l'aide de f''.



Exercice 7.2 : Application de l'égalité des accroissements finis

Soient I un intervalle, f une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I avec $a < b$.

Pour $x \in I$ on pose $g(x) = \dfrac{f(a)+f(x)}{2} - \left(f\left(\dfrac{a+x}{2}\right) + (x-a)^2 A\right)$, où A est une constante réelle.

1. Montrer qu'on peut choisir A de sorte que $g(a) = g(b) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

3. En appliquant l'égalité des accroissements finis à f' entre deux points bien choisis en déduire qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(d).$$

Il s'agit du même type d'exercice que le **7.1**. La différence est qu'ici, au lieu de n'appliquer que le théorème de Rolle, on utilisera également l'égalité des accroissements finis.

1. Vu qu'on a clairement $g(a) = 0$, il faut choisir A tel que $g(b) = 0$. Ceci est simple en prenant le problème « à l'envers » : si A convient, alors :

$$0 = g(b) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b-a)^2 A\right)$$

et le réel

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

convient donc, tout simplement !

Pour déterminer la valeur de A convenant nous avons divisé par $(b-a)^2$; **la réponse n'est donc correcte que si l'on justifie cette division**, *i.e.* qu'on vérifie que $(b-a)^2 \neq 0$, ce qui est évident mais doit néanmoins être signalé.

Posons $A = \dfrac{1}{(b-a)^2}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$, ce qui est licite car $a \neq b$. Avec ce choix de A on a clairement $g(b) = 0 = g(a)$.

2. Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées et même clairement mises en valeur…

g est dérivable sur $[a,b]$ et $g(a) = g(b)$: d'après le théorème de Rolle il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

L'énoncé précis du théorème de Rolle demande en fait que g soit continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; ceci est bien vérifié quand g est dérivable sur $[a,b]$ tout entier !
Le fait qu'on ne demande pas la dérivabilité en a et b **ne signifie pas** que la fonction ne doit pas y être dérivable mais uniquement que le résultat reste vrai **qu'elle le soit ou non**.

3. On a, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - 2(x-a)A.$$

D'une part, $f(a)$ est une constante donc sa dérivée est nulle.

D'autre part, $x \mapsto f\left(\frac{a+x}{2}\right)$ est une composée, plus précisément de f par une fonction affine, d'où le facteur $1/2$ quand on dérive.

En écrivant que $g'(c) = 0$ on aura donc l'expression d'une variation de f', à savoir $f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right)$. On peut exprimer ceci à l'aide de f'' grâce à l'égalité des accroissements finis après en avoir bien sûr vérifié les hypothèses.

On sait que $g'(c) = 0$ ce qui donne, en regroupant les termes en f' à gauche de l'égalité :

$$f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right) = 4(c-a)A.$$

$\frac{a+c}{2} < c$ et f' est dérivable sur $\left[\frac{a+c}{2},c\right]$: on peut donc appliquer l'égalité des accroissements finis à f' entre ces deux points.

Ainsi, il existe $d \in \left]\frac{a+c}{2},c\right[$ tel que

$$f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right) = \left(c - \frac{a+c}{2}\right) f''(d) = \frac{c-a}{2} f''(d).$$

On a donc $\frac{c-a}{2} f''(d) = 4(c-a)A$ soit, comme $c \neq a$, $A = \frac{1}{8} f''(d)$.

Remarquons que $d \in \left]\frac{a+c}{2}, c\right[$ donc, *a fortiori*, $d \in]a,b[$.

Enfin, en reportant cette valeur de A dans l'expression de $g(x)$ pour $x = b$ on obtient :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(d).$$

Exercice 7.3 : Généralisation du théorème de Rolle

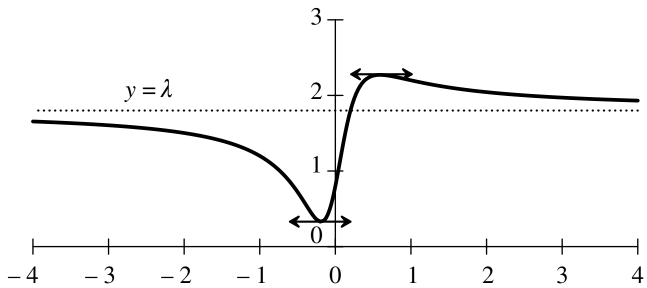
Voir exercice **6.4**

1. Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui-même possédant une même limite finie λ en $+\infty$ et $-\infty$. En considérant l'application $g = f \circ \tan$ montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$.

Par un procédé analogue, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Nous pouvons représenter graphiquement une fonction de la forme de la première question, les tangentes horizontales marquant les points où la dérivée est nulle :



1. Reprenons la démarche de l'exercice **6.4** : pour cela, on commence par prolonger g par continuité en $\pm\pi/2$ puis on vérifie que les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées. À partir d'un réel $\gamma \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $g'(\gamma) = 0$ on construit un réel c tel que $f'(c) = 0$.

Soit $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\tan(x))$.
g est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ comme composée de la fonction tangente, dérivable sur cet intervalle, et de f, dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, par composition des limites, on a

$$\lim_{x\to\pi/2} g(x) = \lambda = \lim_{x\to-\pi/2} g(x).$$

En posant $g(-\pi/2) = g(\pi/2) = \lambda$ on obtient donc une fonction continue sur $[-\pi/2,\pi/2]$.

En résumé : g est continue sur $[-\pi/2,\pi/2]$, dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$: g vérifie donc les hypothèses du théorème de Rolle et il existe donc un réel $\gamma \in]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $g'(\gamma) = 0$.

Autrement dit :

$$(1+\tan^2(\gamma))f'(\tan(\gamma)) = 0$$

soit $f'(\tan(\gamma)) = 0$ car $1+\tan^2(\gamma) \neq 0$.

En posant $c = \tan(\gamma) \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(c) = 0$.

Nous aurions pu également utiliser le résultat de l'exercice **6.4** (qui est cependant hors-programme) : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et possède une même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$ donc f est bornée et atteint au moins une de ses bornes en un point c.
Or la dérivée d'une fonction dérivable qui possède un maximum ou un minimum en un point qui n'est pas l'une des extrémités éventuelles de son intervalle de définition (ce qui est le cas ici, cet intervalle étant $\mathbb{R}$ il n'a pas d'extrémités) s'annule en ce point, d'où $f'(c) = 0$.
Le lecteur attentif aura par ailleurs reconnu, dans le raisonnement de l'exercice **6.4**, une démarche semblable à la démonstration du théorème de Rolle : démonstration de l'existence d'extrema puis localisation des points où ils sont atteints.
Notons enfin que g n'est pas forcément dérivable en $\pm\pi/2$, ce qui ne pose aucun problème pour appliquer le théorème de Rolle puisque ses hypothèses n'exigent que la dérivabilité sur l'ouvert. Par exemple, avec $f(x) = \sqrt{\pi^2/4 - \text{Arctan}^2(x)}$, on a $g(x) = \sqrt{\pi^2/4 - x^2}$ qui n'est pas dérivable aux extrémités.

2. Nous allons refaire le raisonnement précédent mais avec $[0,\pi/2[$ à la place de $]-\pi/2,\pi/2[$: il n'y a ici à considérer qu'un prolongement, à savoir en $\pi/2$.

Soit $g : [0,\pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(\tan(x))$. g est dérivable sur $[0,\pi/2[$.
De plus :

$$\lim_{x\to\pi/2} g(x) = f(0)$$

donc, en posant $g(\pi/2) = f(0)$, on obtient une fonction g continue sur $[0,\pi/2]$ et dérivable sur $[0,\pi/2[$.

De plus, $g(0) = f(0) = g(\pi/2)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\gamma \in]0,\pi/2[$ tel que $g'(\gamma) = 0$, *i.e.*

$$(1 + \tan^2(\gamma)) f'(\tan(\gamma)) = 0.$$

En posant $c = \tan(\gamma) \in \mathbb{R}_+^*$ on a alors $(1 + c^2) f'(c) = 0$ soit, comme $1 + c^2 \neq 0$, $f'(c) = 0$.

Exercice 7.4 : Formule de Leibniz

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}.$$

Calculer les dérivées successives de f.

La fonction est donnée sous forme d'un produit et le calcul de la dérivée n-ième d'un produit fait naturellement penser à la formule de Leibniz. Cette formule est utile si on sait effectivement calculer les dérivées successives de chaque facteur du produit. Or, ici, ces facteurs sont :

• un polynôme, dont les dérivées successives sont identiquement nulles à partir d'un certain rang ;

• une exponentielle, dont les dérivées successives peuvent se calculer aisément par récurrence.

La présence du polynôme aura pour effet de tronquer la somme obtenue par application de la formule de Leibniz : en effet, sa dérivée sera nulle à partir d'une certain rang (ici, à partir de la dérivée troisième).

Commençons donc par déterminer ces dérivées successives, la formule de Leibniz permettant de conclure.

Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $g(x) = x^2 + 2x - 1$ et $h(x) = e^{-x}$.

D'une part, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x - 1 \\ g(x) &= 2x + 2 \\ g(x) &= 2 \\ g^{(n)}(x) &= 0\,(n \geqslant 3). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel x et tout entier naturel n, on a $h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$.

Ainsi, d'après la formule de Leibniz, on a pour tout réel x et tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

Comme la fonction $g^{(k)}$ est identiquement nulle pour $k \geqslant 3$, la somme précédente s'arrête en fait à $k = 2$ si $n \geqslant 2$.

Écrire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

car $g^{(k)} = 0$ si $k \geqslant 3$ n'est pas rigoureusement exact : en effet, si $n = 1$ par exemple, la somme s'arrête à $k = 1$; que signifierait alors le terme pour $k = 2$, à savoir $\binom{1}{2} g^{(2)}(x) h^{(-1)}(x)$? Nous allons donc traiter à part les cas particuliers $n = 0$ et $n = 1$.

Pour $n \geqslant 2$ il vient successivement :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= g(x)h^{(n)}(x) + ng'(x)h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g''(x)h^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2 + 2x - 1)(-1)^n e^{-x} + n(2x+2)(-1)^{n-1} e^{-x} \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} 2(-1)^n e^{-x} \\ &= (-1)^n e^{-x} \left((x^2 + 2x - 1) - n(2x+2) + n(n-1) \right). \\ &= (-1)^n e^{-x} (x^2 + 2(1-n)x + n^2 - 3n - 1). \end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas des premières dérivées ($n = 0$ ou 1). Celles-ci se calculent directement sans problème.

Par ailleurs, pour tout réel x :

$$f^{(0)}(x) = f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(x^2 - 3)e^{-x}.$$

On remarque que la formule établie plus haut est encore valable avec $n = 0$ ou $n = 1$; nous avons donc établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} (x^2 + 2(1-n)x + n^2 - 3n - 1).$$

Exercice 7.5 : Formule de Leibniz et coefficients du binôme

On fixe une entier naturel n.

1. Calculer de deux façons différentes la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^{2n}$ (on pourra par exemple écrire $x^{2n} = x^n \times x^n$).

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

3. Retrouver la valeur de cette somme en calculant de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles de $\{1,\ldots,2n\}$ de cardinal n.

Notons que la dernière question utilise uniquement des techniques de dénombrement, ce qui est l'origine même des coefficients binomiaux ; il y a bien souvent deux façons d'établir des relations vérifiées par ces coefficients : par le dénombrement ou par le calcul en utilisant les formules qui les font intervenir, à savoir la formule du binôme de Newton et la formule de Leibniz.

Illustrons ces méthodes sur un exemple simple bien connu : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Ceci peut se démontrer :

• en remarquant que la somme n'est autre que le nombre de sous-ensembles de $\{1,\ldots,n\}$ (pour chaque entier k il y a en effet $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de cardinal k) et est donc égal à 2^n ;

• en reconnaissant (de manière un peu astucieuse) un cas particulier de la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

L'exercice propose ici des raisonnements analogues à ceci près que les coefficients binomiaux apparaîtront via la formule de Leibniz.

• Tout d'abord, rappelons une formule générale qui peut se démontrer par récurrence : pour tout entier naturel p et tout entier naturel $k \leqslant p$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^p) = \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k}.$$

Cette formule se retrouve facilement en considérant les première valeurs de k :

$$\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}(x^p) = x^p = \frac{p!}{(p-0)!} x^{p-0}$$

$$\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1}(x^p) = px^{p-1} = \frac{p!}{(p-1)!}x^{p-1}$$

Elle permet déjà, avec $p = 2n$ et $k = n$, de calculer d'une façon aisée la dérivée demandée.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!}x^n.$$

• L'application de la formule de Leibniz au produit $x^n \times x^n$ fournit une expression de cette dérivée sous la forme d'une somme :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \times x^n) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{(n-(n-k))!}x^{n-(n-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n!)^2}{(n-k)!k!}x^n\\ &= x^n n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.\end{aligned}$$

Nous avons donc deux expressions de la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, ce qui permet de conclure.

On a, pour tout nombre réel x :

$$\frac{(2n)!}{n!}x^n = x^n n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

d'où l'on tire, pour $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

3. Par définition des coefficients binomiaux, il y a $\binom{2n}{n}$ sous-ensembles de cardinal n d'un ensemble à $2n$ éléments.

Pour retrouver la relation précédente, il faut désormais faire apparaître les $\binom{n}{k}$ pour toutes les valeurs de k de 0 à n.

Une façon de faire est la suivante : pour construire un sous-ensemble de cardinal n de $\{1,\ldots,2n\}$, on commence par choisir k éléments de $\{1,\ldots,n\}$ puis $n-k$ éléments de $\{n+1,\ldots,2n\}$. Chacun de ces deux choix fera apparaître un coefficient binomial.

Pour une valeur donnée de k entre 0 et n il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k entiers entre 1 et n et $\binom{n}{n-k}$ façons d'en choisir $n-k$ entre $n+1$ et $2n$.
Il y a donc $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ possibilités (car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$) de choisir n entiers entre 1 et $2n$ de sorte qu'il y en ait exactement k qui soient inférieurs ou égaux à n.
Au total, il y a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

sous-ensembles de $\{1,\ldots,2n\}$ de cardinal n.
Etant donné qu'il y en a également $\binom{2n}{n}$ par définition même des coefficients binomiaux, nous avons bien retrouvé la relation précédente.

Exercice 7.6 : Fonctions pathologiques

1. On pose $f(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2\sin(1/x)$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.
2. On considère la fonction g définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = x\,f(x)$. Montrer que g ne possède pas de dérivée seconde en 0 mais qu'elle possède néanmoins un développement limité en 0 à l'ordre 2.

Cet exercice présente des fonctions possédant des propriétés contre-intuitives. Il est intéressant de les avoir à l'esprit afin de **ne pas inventer des théorèmes faux** comme « si f est dérivable alors f' est continue » ou « f possède un développement limité à l'ordre 2 donc est deux fois dérivable »…

Rassurez-vous : en pratique on manipule des fonctions suffisamment régulières, bien souvent de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour lesquelles il n'y a pas de problème de ce type.

Parfois les fonctions considérées sont définies « en plusieurs morceaux », *i.e.* par différentes formules comme f l'est ici par $f(x) = x^2\sin(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Il faut alors soigneusement étudier leur régularité aux points de raccordement des domaines de validité des formules (ici c'est en 0).

1. Les théorèmes usuels sur les produits et composées de fonctions dérivables s'appliquent sans problème sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$; il restera ensuite à étudier à la main le comportement de f en 0 (limite de son taux d'accroissement pour étudier la dérivabilité en 0 et limite de sa dérivée pour étudier la continuité de f').

Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$

Sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ la fonction f est le produit de la fonction $x \mapsto x^2$, qui est dérivable, et de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, qui l'est aussi comme composée de fonctions dérivables.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
De plus, d'après les formules usuelles :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Dérivabilité en 0

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin(1/x).$$

Cette expression est le produit de x, qui tend vers 0 en 0, et de $\sin(1/x)$, qui est borné : on a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Il reste donc à voir que $f'(x)$ ne tend pas vers $f'(0) = 0$ quand x tend vers 0. Pour cela, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de trouver une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $f'(x_n)$ ne tende pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Discontinuité de f' en 0

Si f' était continue en 0 on aurait

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0.$$

Or

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin(1/x) = 0$$

(produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée) donc

$$\lim_{x\to 0} \cos(1/x) = 0.$$

En particulier, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls tendant vers 0 :

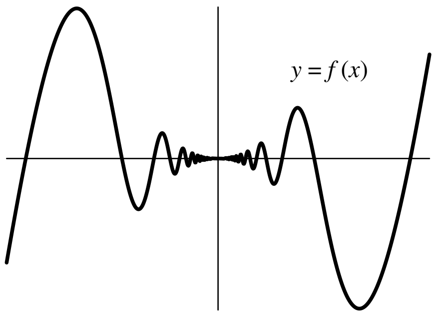
$$\lim_{n\to\infty} \cos(1/x_n) = 0.$$

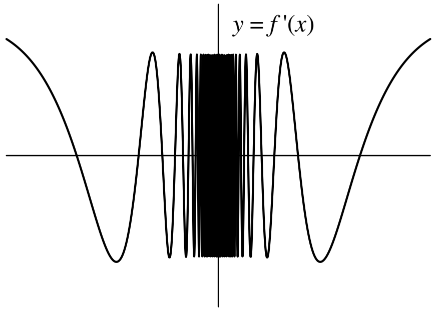
Cependant, en prenant $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(1/x_n) = 1.$$

C'est absurde : ainsi f' ne tend pas vers 0 en 0.

On voit ce qui se passe en représentant graphiquement les fonctions f et f' : f « s'écrase » bien au voisinage de 0, ce qui confirme le résultat $f'(0) = 0$, mais f' oscille violemment entre -1 et 1 et de ce fait ne converge pas en 0.





2. Pour étudier la dérivabilité de g on peut utiliser les résultats précédents : les raisonnements s'adaptent sans problème. g s'exprime en fonction de f donc g' en fonction de f et f' : les résultat précédents d'existence (ou non) de limites peuvent donc être utilisés sans avoir à refaire tous les calculs.

Développement limité à l'ordre 2 de g en 0 :

Il nous faut un $o(x^2)$, *i.e.* une expression de la forme $x^2h(x)$ avec h qui tend vers 0 en 0. On remarque que la fonction g elle-même est de cette forme !

On a la factorisation :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 \sin(1/x) \\ &= x^2 \times x \sin(1/x). \end{aligned}$$

Comme $\sin(1/x)$ est borné :

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

et enfin $g(x) = o(x^2)$ quand x tend vers 0 : ceci montre que g possède un développement limité à l'ordre 2 en 0 (de partie régulière nulle).

Étude de l'existence de la dérivée seconde de g en 0 :

g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$g'(x) = f(x) + xf'(x).$$

On en déduit, pour $x \neq 0$:

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} + f'(x).$$

Si la dérivée seconde de g en 0 existe ce quotient tend vers $g''(0)$ quand x tend vers 0.
Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Ainsi, f' serait continue en 0, ce qui contredit le résultat de la première question.

Exercice 7.7 : $f(f(x)) = ax + b$

Cet exercice fait intervenir des suites arithmético-géométriques.

Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que, pour tout réel x, $f(f(x)) = ax + b$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(ax+b) = af(x) + b$. En déduire que, pour réel x, $f'(a\,x + b) = f'(x)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

3. Montrer que f' est constante. En déduire l'expression de f.

4. Que faire si $a \in]1,+\infty[$?

1. Pour faire apparaître $af(x)+b$ il suffit de remplacer x par $f(x)$ dans la relation donnée : puisqu'elle est vraie pour tout réel x elle est aussi vraie pour tous les réels de la forme $f(x)$.

La relation vérifiée par f donne, quand on remplace x par $f(x)$:

$$f(f(f(x))) = a\, f(x) + b.$$

Si, au lieu de faire ceci, on avait appliqué la fonction f aux deux membres de l'égalité, on aurait obtenu :

$$f(f(f(x))) = f(a\,x + b).$$

On a donc montré la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(a\,x+b) = a\, f(x) + b.$$

Plus abstraitement, il y a deux façons de voir $f \circ f \circ f$: dire que c'est $(f \circ f) \circ f$ (c'est la première relation obtenue) ou encore $f \circ (f \circ f)$ (deuxième relation). La clef est donc en fait **l'associativité de la composition** des applications.

On peut enfin dériver pour obtenir la relation voulue sur f'. Attention, le membre de gauche est une fonction composée !

En dérivant cette égalité par rapport à la variable x on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\, f'(ax+b) = a\, f'(x).$$

Le réel a étant différent de 0 on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(ax+b) = f'(x).$$

Il faut rester vigilant et rigoureux jusqu'au bout : avant de simplifier une relation (ici par a) il faut s'assurer que l' **on ne divise pas par** 0.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* : pour l'étudier, on considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - c$ où c est la solution de l'équation $ax+b=x$... qui n'est autre que ℓ.

Ne vous attendez pas à être toujours autant guidé que dans cet exercice lorsque vous aurez à étudier de telles suites : il faut savoir poser soi-même le réel c en question et étudier la suite.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \ell &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n - a\,\frac{b}{1-a} \\ &= a(u_n - \ell). \end{aligned}$$

Ainsi, la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison $a \in]0,1[$: elle est donc convergente de limite nulle, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

3. Les deux premières questions n'avaient aucun rapport entre elles, il est temps d'utiliser leurs résultats respectifs.

Le lien est donné par la relation vérifiée par f' : en effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle comme dans la deuxième question, on a, pour tout entier naturel n, $f'(u_{n+1}) = f'(u_n)$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et f' est continue donc nous allons pouvoir utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.
Le résultat de la première question montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(u_{n+1}) = f'(u_n).$$

La suite de terme général $f'(u_n)$ est donc constante et, en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(u_n) = f'(u_0).$$

Or f' est continue et $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$f'(\ell) = f'(u_0) = f'(x).$$

Le réel x ayant été choisi arbitrairement on a donc la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(\ell).$$

Autrement dit, f' est constante.

f' étant constante, f est affine (*i.e.* une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1). On peut déterminer ses coefficients en reportant son expression dans la relation vérifiée par $f \circ f$.

Nous aurons ainsi obtenu une condition nécessaire sur l'expression de f : **si** f est solution du problème **alors** f est de la forme… Il restera à vérifier que les fonctions obtenues conviennent bien (ou, si besoin, éliminer les solutions parasites).

f est donc affine : il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x + \mu.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = \lambda^2 x + (\lambda + 1)\mu.$$

Par définition de f on a donc :

$$\begin{cases} \lambda^2 &= a \\ (\lambda+1)\mu &= b \end{cases}$$

Nous pouvons alors distinguer deux cas :

- si $\lambda = \sqrt{a}$ alors $\mu = \dfrac{b}{1+\sqrt{a}}$;
- si $\lambda = -\sqrt{a}$ alors $\mu = \dfrac{b}{1-\sqrt{a}}$ (ce dernier calcul est licite car $1-\sqrt{a}) \neq 0$).

Il est aisé de vérifier que les deux applications

$$x \mapsto x\sqrt{a} + \frac{b}{1+\sqrt{a}}$$

et

$$x \mapsto -x\sqrt{a} + \frac{b}{1-\sqrt{a}}$$

conviennent bien.

4. En reprenant la démarche et les notations précédentes, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a > 1$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$: le raisonnement ci-dessus ne peut alors plus être poursuivi.
On peut néanmoins tenter de s'y ramener en faisant intervenir la réciproque de l'application affine $x \mapsto ax+b$, qui est $x \mapsto (x-b)/a$.

Supposons $a > 1$. On a alors, comme précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b)$$

soit, en remplaçant x par $\dfrac{x-b}{a}$:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

On peut donc appliquer le résultat précédent en remplaçant b par $-\dfrac{b}{a}$ et a par $\dfrac{1}{a} \in]0,1[$: la fonction f est donc affine.
Le calcul de la question reste valable et les fonctions convenant sont définies par les mêmes expressions.

Exercice 7.8 : Fonctions convexes (sauf PTSI)

Les deux questions sont indépendantes.
1. Soit f une application convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Montrer que ceci n'est pas forcément le cas pour une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}_+$.

2.a. Soit f une application convexe sur un intervalle non majoré I. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite, finie ou $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.
2.b. Dans le cas où cette limite est un réel ℓ, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite, finie ou $-\infty$, quand x tend vers $+\infty$.
Pour cela, on pourra étudier la monotonie de l'application qui, à $x \in I$, associe $f(x) - \ell x$.

Il est ici question de fonctions convexes mais **il n'y a pas d'hypothèse de dérivabilité**. Les outils adaptés sont donc les fonctions « pentes des sécantes », ce que laisse également penser la présence de $\dfrac{f(x)}{x}$ dans la question **2.a.**

1. Afin de débuter, nous pouvons faire intervenir les fonctions pentes de deux façons : tout d'abord, nous savons qu'elles sont croissantes car f est convexe ; ensuite, f étant majorée, on peut en déduire une inégalité vérifiée par ces fonctions. Les différentes théorèmes liant limite et monotonie permettront de conclure.

Plutôt que de considérer une fonction pente arbitraire nous considérerons la fonction pente en 0 (qui à x associe $(f(x) - f(0))/x$) afin d'alléger les calculs.

Soit M un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

f étant convexe, l'application $p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$, est croissante.

Pour $x > 0$ on a $p(x) \leqslant \dfrac{M - f(0)}{x}$.

p étant croissante, elle possède une limite (éventuellement $+\infty$) en $+\infty$.

En passant à la limite dans l'inégalité précédente on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) \leqslant 0$, ce qui montre que cette limite est finie et négative.

Pour $x < 0$ on a $p(x) \geqslant \dfrac{M - f(0)}{x}$; de la même manière, p possède une limite (éventuellement $-\infty$) en $-\infty$ et le passage à la limite donne $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) \geqslant 0$, ce qui montre que cette limite est finie et positive.

Nous avons ainsi bien utilisé toutes les hypothèses : f est convexe (croissance de p), f est majorée (par M) mais également le fait que ces propriétés sont vraies sur $\mathbb{R}$ tout entier puisqu'on a considéré des limites en $\pm\infty$.

Nous avons ainsi montré que p est croissante sur $\mathbb{R}$ et que sa limite en $-\infty$ est supérieure ou égale à sa limite en $+\infty$! Ceci n'est possible que dans une situation : si p est constante.

Pour rédiger correctement ceci nous pouvons affiner ce qui précède : non seulement le théorème de la limite monotone montre l'existence de limites mais il fournit encore l'expression abstraite de cette limite avec une borne supérieure ou inférieure. Nous aurons ainsi utilisé toute la conclusion du théorème.

p étant croissante, $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} p(x)$) est la borne inférieure (resp. supérieure) de p sur $\mathbb{R}^*$.

En particulier, pour tout réel non nul t :

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) \leqslant p(t) \leqslant \lim_{x\to+\infty} p(x).$$

Les inégalités précédemment obtenues sur ces limites montrent que $0 \leqslant p(t) \leqslant 0$, *i.e.* $p(t) = 0$: on a donc, pour tout réel non nul t, $f(t) = f(0)$, donc f est constante.

Si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}_+$ le résultat est faux comme on le voit en considérant la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$: elle est convexe (car $f'' = f$ est positive) et majorée sur $\mathbb{R}_+$ (par 1) mais n'est pas constante.

Plus précisément, seule la première partie du raisonnement précédent reste valable (on peut considérer des limites en $+\infty$ mais pas en $-\infty$).

On peut toujours affirmer que la fonction p est négative mais faute d'un autre encadrement elle n'est plus nécessairement nulle.

2.a. L'expression $\dfrac{f(x)}{x}$ suggère d'utiliser la fonction « pente de la sécante » d'origine 0 mais 0 n'a aucune raison d'appartenir à I…

Nous pouvons néanmoins conserver l'idée de la fonction pente : nous allons d'abord considérer une fonction pente d'origine $a \in I$ puis faire apparaître le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$.

Soit $a \in I$ et $p : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

f étant convexe, p est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, p possède donc une limite, éventuellement $+\infty$, en $+\infty$.

D'autre part : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x-a)p(x) + f(a)}{x} = \left(1 - \dfrac{a}{x}\right) p(x) + \dfrac{f(a)}{x}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(a)}{x} = 0$ on en déduit que $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite en $+\infty$ égale à $\lim_{x\to+\infty} p(x)$; cette limite est donc finie ou $+\infty$.

2.b. Suivons l'indication de l'énoncé : pour étudier la monotonie de $x \mapsto f(x) - \ell x$ nous allons essayer de faire apparaître un quotient de la forme $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ car on sait, f étant convexe, que cette expression croît avec x et que de plus, d'après la question précédente, elle tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

> Il n'y a pas d'hypothèse de dérivabilité, on ne peut donc pas dériver pour étudier la monotonie !

Pour $x \in I$ posons $g(x) = f(x) - \ell x$.

Fixons un élément a de I et étudions le signe de $g(x) - g(a)$ en fonction de celui de $x - a$.

On a : $g(x) - g(a) = (f(x) - f(a)) - \ell(x - a)$.

Pour $x \neq a$ on a donc $g(x) - g(a) = (x - a)\left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell\right)$: il reste désormais à déterminer le signe de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell$.

À la question précédente on a montré que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ était une fonction croissante de x tendant vers ℓ en $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, cette limite est la borne supérieure de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Ainsi : pour tout $x \in I$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \ell$.

Ainsi, $g(x) - g(a)$ est du signe opposé à celui de $x - a$: la fonction g est donc décroissante sur I.

D'après le théorème de la limite monotone, elle possède donc une limite en $+\infty$ qui est finie ou $-\infty$.

Exercice 7.9 : Inégalités de convexité (sauf PTSI)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$; en déduire que, pour tous n-uplets $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ de réels strictement positifs :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)}.$$

On pourra commencer par traiter le cas particulier $b_1 = \cdots = b_n = 1$.

Rappelons les inégalités de convexité : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

On dispose de la généralisation suivante, également appelée *inégalité de Jensen* : si $x_1,\ldots,x_n$ sont des éléments de I et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Elle est presque toujours utilisée dans le cas où tous les λ_k sont égaux à $\frac{1}{n}$, soit :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

De plus, la fonction exponentielle permet de passer des sommes aux produits et de transformer le facteur $1/n$ en racine n-ième, ce qui permettra d'obtenir les formes des résultats donnés dans l'énoncé.

1. Nous allons commencer par utiliser la convexité de l'exponentielle en écrivant l'inégalité de Jensen pour cette fonction : comme nous venons de le voir ce sera un bon moyen pour faire apparaître à terme des racines n-ièmes.

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Jensen avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ et $x_1,\ldots,x_n$ des réels quelconques :

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}.$$

Notons que

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} e^{x_k}}$$

d'où

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} e^{x_k}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}.$$

C'est presque le résultat attendu. Plus précisément, il suffirait d'avoir $e^{x_k} = a_k$, soit $x_k = \ln(a_k)$. Ceci est possible car $a_k > 0$: l'hypothèse de signe intervient ici.

L'inégalité précédente donne, dans le cas où l'on prend $x_k = \ln(a_k)$ (ce qui est licite car $a_k > 0$) :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

Pour $n = 2$ on retrouve une inégalité classique : $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, qui peut se démontrer de manière plus élémentaire en remarquant que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

2. Cette fonction étant indéfiniment dérivable nous allons vérifier que sa dérivée seconde est positive pour montrer qu'elle est convexe.

Ceci fait, les calculs seront tout à fait analogues à ceux de la question précédente. La difficulté calculatoire sera juste un niveau au-dessus puisqu'il faudra manipuler simultanément le logarithme et l'exponentielle.

On a, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

f'' est positive sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe.
Étant donné un n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ l'inégalité de Jensen appliquée à f donne, avec tous les λ_k égaux à $1/n$:

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + e^{x_k}\right).$$

On remarque que, d'une part :

$$1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} e^{x_k}}$$

et que, d'autre part :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+e^{x_k}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+e^{x_k})}\right).$$

La fonction exp étant croissante, on en déduit :

$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}e^{x_k}}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+e^{x_k})}.$$

Ainsi, si tous les b_k sont égaux à 1 on obtient, avec $x_k=\ln(a_k)$:

$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}.$$

Revenons au cas général où les b_k sont strictements positifs quelconques. On peut appliquer la précédente inégalité au n-uplet $(a_1/b_1,\dots,a_n/b_n)$, ce qui donne :

$$1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{b_k}\right)}$$

soit, en multipliant par $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}$:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)}.$$

Exercice 7.10 : Développements limités

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\text{ch}(x)\cos(x)+\text{sh}(x)\sin(x)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(\sin(x))$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

4. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 2 de $\sqrt{x}$.

5. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\pi/4$ de $\tan(x)$.

1. La première chose à faire est d'écrire les développements limités à l'ordre 4 en 0 de toutes les fonctions usuelles intervenant dans l'expression considérée. Ces développements limités doivent être connus **par cœur**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\\
\cos(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\\
\sin(x) &= x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)
\end{aligned}$$

Pour calculer les développements limités des produits, il suffit de calculer les produits des parties régulières (*i.e.* la partie polynomiale, sans le o) en omettant les termes dont le degré excède 4.

Plus précisément, pour le produit $\mathrm{ch}(x)\cos(x)$ on a :

$$\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)=1-\frac{1}{6}x^4+\text{ termes de degrés } >4.$$

De même, pour le produit $\mathrm{sh}(x)\sin(x)$:

$$\left(x+\frac{1}{6}x^3\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)=x^2+\text{ termes de degrés } >4.$$

La notation de Landau, *i.e.* avec o, sert précisément à écrire ceci rigoureusement : tout terme de degré strictement supérieur à 4 est « absorbé » par le terme $o(x^4)$. Autrement dit, on peut rédiger comme suit :

En utilisant les développements limités usuels on obtient

$$\mathrm{ch}(x)\cos(x)=1-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$$

et

$$\mathrm{sh}(x)\sin(x)=x^2+o(x^4).$$

Notez que l'on ne calcule surtout pas l'intégralité des produits ! On sait que les termes de degré strictement supérieur à 4 n'apparaîtront pas dans le résultat et on ne prend donc même pas la peine de les expliciter dans les calculs intermédiaires. Ceci permet de calculer efficacement, *i.e.* rapidement et sans risque d'erreur.

Enfin, il n'y a plus qu'à additionner pour obtenir le résultat.

Ainsi :

$$\mathrm{ch}(x)\cos(x)+\mathrm{sh}(x)\sin(x)=1+x^2-\frac{1}{6}x^4+o(x^4).$$

2. Comme $\sin(0) = 0$, nous avons une composition de développements limités en 0.

Le principe général est le même : on doit commencer par expliciter les développements limités en 0 des fonctions sinus et cosinus à l'ordre demandé (ici 4) puis composer les parties régulières en supprimant systématiquement tout terme dont le degré excède 4.

Rappelons que

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Autrement dit, dans la composition, il faudra faire intervenir le carré et la puissance 4 de la partie régulière du développement limité de la fonction sinus en 0.

Pour faire ceci efficacement, nous allons calculer de proche en proche les développements limités des puissances de sinus **en effectuant à chaque étape les simplifications** : nous verrons que plus la puissance est grande plus les calculs sont simples car il y aura de plus en plus de termes simplifiés !

Pour finir, on remplace dans le développement limité du cosinus le terme en x^2 par la partie régulière de $\sin^2(x)$ et le terme en x^4 par celle de $\sin^4(x)$.

Tous les termes qui ont pu être oubliés à un moment ou un autre parce que leur degré était supérieur à 4 sont alors en fait « cachés » dans le terme $o(x^4)$.

D'une part, d'après le cours :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

De plus, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\\
\sin^2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\\
\sin^3(x) &= x^3 + o(x^4)\\
\sin^4(x) &= x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Ainsi, le développement limité composé s'écrit

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

soit, toutes simplifications effectuées :

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

3. Le calcul du développement limité d'un **quotient** se ramène à celui d'une **composée** avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Comme $\cos(0) = 1$, il suffit de poser $u(x) = \cos(x) - 1$. Alors $\cos(x) = 1 + u(x)$ et $u(0) = 0$. On peut donc voir la fonction cosinus comme la composée $f \circ u$: il n'y a plus qu'à composer deux développements limités en 0 en suivant exactement la même démarche que dans la question précédente.

Posons $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $u(x) = \cos(x) - 1$. Alors $\dfrac{1}{\cos(x)} = f(u(x))$.
D'autre part, on a les développements limités en 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

donc

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

et également

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4).$$

Les développements limités des puissances de u sont :

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ u^3(x) &= o(x^4) \\ u^4(x) &= o(x^4) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$f(u(x)) = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

soit finalement

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

4. On connaît le développement limité de $\sqrt{1+x}$ quand x tend vers 0 ou, ce qui est la même chose, celui de $\sqrt{x}$ quand x tend vers 1. Autrement dit, nous ne sommes pas dans un cas relevant directement du cours.

Afin de s'y ramener posons une nouvelle variable h qui tend vers 0 quand x tend vers 2 ; il n'y aura alors plus qu'à essayer de faire apparaître des expressions connues de développements limités en 0.

Cette démarche doit être systématiquement effectuée.

Posons $h = x - 2$. On a alors $\sqrt{x} = \sqrt{2+h}$ dont on cherche le développement limité quand h tend vers 0.

Il ne nous reste plus qu'à faire apparaître une expression de la forme $\sqrt{1+u}$ avec u tendant vers 0 pour pouvoir calculer le développement limité demandé par une composition. Pour cela, on peut factoriser 2 et prendre $u = h/2$.

> Nous avons ici plusieurs développements limités, mais tous ne sont pas considérés au même point selon que l'on manipule x, u ou h.
> Il faut donc, d'une manière ou d'une autre, préciser ceci. Soit on l'indique dans la notation o, par exemple $o_{x\to 2}((x-2)^4)$, soit on conserve pour ne pas l'alourdir la notation $o((x-2)^4)$ mais en précisant avant en toutes lettres que l'on considère la situation où x tend vers 2.

Posons $h = x - 2$. Alors $\sqrt{x} = \sqrt{2+h}$. De plus :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$$

et on cherche le développement limité de ceci quand h tend vers 0 car x tend vers 2 et $h = x - 2$.

Or on a le développement limité quand u tend vers 0 :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

Il faut maintenant remplacer u par $h/2$ dans cette expression. Notez que c'est une composée, mais particulièrement simple : il n'y a pas de o dans l'expression de u en fonction de h.

Comme $\frac{h}{2}$ tend vers 0 on peut remplacer u par $\frac{h}{2}$ dans le développement limité précédent et on obtient le développement limité quand h tend vers 0 :

$$\sqrt{1+\frac{h}{2}} = 1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{32}h^2 + o(h^2).$$

d'où, en multipliant par $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + o(h^2).$$

En revenant à x on a le développement limité quand x tend vers 2 :

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o((x-2)^2).$$

5. La situation est analogue : nous poserons $h = x - \pi/4$ pour faire apparaître le développement limité quand h tend vers 0 de $\tan(h + \pi/4)$.

Pour se ramener à des formules connues de développements limités en 0 on peut utiliser la trigonométrie : ainsi on fera apparaître des termes en $\tan(h)$.

Posons $h = x - \pi/4$: on cherche alors le développement limité quand h tend vers 0 de $\tan(h + \pi/4)$.

Or, d'après les formules de trigonométrie usuelles :

$$\tan(h + \pi/4) = \frac{\tan(h) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(h)\tan(\pi/4)} = \frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)}.$$

Toujours d'après les formules du cours on sait que $\tan(h) = h + o(h^2)$. On a donc :

$$1 + \tan(h) = 1 + h + o(h^2) \quad \text{et} \quad 1 - \tan(h) = 1 - h + o(h^2).$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1 - \tan(h)} = 1 + h + h^2 + o(h^2)$$

et enfin

$$\frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)} = 1 + 2h + 2h^2 + o(h^2)$$

soit, en revenant à x, le développement limité quand x tend vers $\pi/4$:

$$\tan(x) = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + o((x - \pi/4)^2)$$

Exercice 7.11 : Formes indéterminées

1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \; x \; \frac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}.$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1} \big((x^2 + x - 2)\tan(\pi x/2) \big).$$

3. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt{x^2 + b} - \sqrt{x^2 + a}$$

puis un réel α tel que $x^\alpha f(x)$ possède une limite finie non nulle, que l'on calculera, quand x tend vers $+\infty$.

Il y a ici trois types de formes indéterminées :

- dans la première, x tend vers 0, ce qui permet d'utiliser les développements limités en 0 connus des fonctions usuelles ;
- dans la deuxième, x tend vers 1 : on posera donc $h = x - 1$ et on essaiera de faire apparaître des développements limités connus quand h tend vers 0 ;
- dans la troisième, x tend vers $+\infty$: on posera donc $h = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener à des développements limités quand h tend vers 0.

Enfin, rappelons qu'une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son développement limité : comme l'exercice demande de calculer de simples limites, et non des développements limités à des ordres plus ou moins grands, on pourra simplifier les expressions obtenues avec des équivalents.

Par exemple, comme $\tan(u) = u + o(u)$ quand u tend vers 0, on pourra simplement écrire $\tan(u) \sim u$.

La rédaction avec des équivalents peut être dangereuse car il n'y a aucune règle générale simple pour les additionner ou les composer. Cependant, on peut multiplier ou diviser des équivalents.

Ainsi, si l'on considère par exemple la première question :

• il **faut** utiliser des développements limités pour étudier séparément le numérateur et le dénominateur, car ils contiennent une différence ;

- on **peut** en déduire un équivalent de chacun puis calculer directement avec ces équivalents puisqu'on aura alors un quotient et un produit.

Évidemment, rien n'interdit de manipuler des développements limités de bout en bout mais nous adopterons ici le point de vue des équivalents quand cela est possible.

1. Il faut avant tout décider de l'ordre auquel on poussera les développements limités.

On sait que $\mathrm{sh}(x)$ et $\sin(x)$ ont tous deux pour premier terme x ; pour obtenir un développement limité intéressant de leur différence il faudra aller à un ordre qui fera apparaître au moins un terme en plus, donc au moins à l'ordre 3 vu que leurs termes d'ordre 2 sont nuls.

La même remarque s'applique à $\mathrm{ch}(x)$ et $\cos(x)$.

Au pire, si l'on avait oublié cette discussion, on aurait obtenu $\mathrm{ch}(x) - \cos(x) = o(x^2)$ et $\mathrm{sh}(x) - \sin(x) = o(x^2)$, ce qui est à la fois parfaitement vrai et complètement inutile pour répondre à la question.

Quand ceci vous arrive, rien n'est perdu : il suffit de tout recommencer mais en allant à un ordre supérieur dans les développements limités de départ.

D'après les formules usuelles du cours on a les développements limités à l'ordre 3 en 0 :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) - \cos(x) &= x^2 + o(x^3) \\ \mathrm{sh}(x) - \sin(x) &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui fournit les équivalents en 0 :

$$\mathrm{ch}(x) - \cos(x) \sim x^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) - \sin(x) \sim \frac{1}{3}x^3$$

soit enfin :

$$x\,\frac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)} \sim x\,\frac{x^2}{x^3/3}$$

d'où la limite cherchée :

$$\lim_{x\to 0} x\,\frac{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)} = 3.$$

2. Comme d'habitude, on se ramène à une limite en 0 en posant $h = x - 1$. Cependant, tout n'est pas réglé : on fait ainsi apparaître $\tan(\pi/2 + \pi h/2)$ qui diverge quand h tend vers 0.

Encore une fois, il va falloir user de formules de trigonométrie pour faire apparaître des termes en $\tan(u)$ avec u tendant vers 0 et donc utiliser les développements limités usuels.

Posons $h = x - 1$: il faut alors déterminer la limite quand h tend vers 0 de

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 2)\tan(\pi x/2) &= ((1+h)^2 + (1+h) - 2)\tan(\pi(1+h)/2) \\ &= (h^2 + 3h)\tan(\pi/2 + \pi h/2).\end{aligned}$$

D'après une formule usuelle de trigonométrie :

$$\tan(\pi/2 + \pi h/2) = -\frac{1}{\tan(\pi h/2)}$$

d'où :

$$(x^2 + x - 2)\tan(\pi x/2) = -\frac{h^2 + 3h}{\tan(\pi h/2)}.$$

On sait que $\tan(u) \sim u$ quand u tend vers 0, donc $\tan(\pi h/2) \sim \pi h/2$ quand h tend vers 0.

De plus, $h^2 + 3h \sim 3h$ quand h tend vers 0.

On en déduit

$$\begin{aligned}-\frac{h^2 + 3h}{\tan(\pi h/2)} &\sim -\frac{3h}{\pi h/2} \\ &= -\frac{6}{\pi}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x - 2)\tan(\pi x/2) = -\frac{6}{\pi}.$$

3. Comme annoncé en préambule nous allons poser $h = 1/x$. Nous verrons qu'il ne se pose alors aucune difficulté supplémentaire.

Posons $h = 1/x$: on cherche alors un équivalent quand h tend vers 0 de

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{\frac{1}{h^2} + b} - \sqrt{\frac{1}{h^2} + a} \\ &= \frac{1}{h}\left(\sqrt{1 + bh^2} - \sqrt{1 + ah^2}\right).\end{aligned}$$

On connaît le développement limité suivant quand u tend vers 0 :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$$

d'où, en posant $u = bh^2$ qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0, le développement limité suivant quand h tend vers 0 :

$$\sqrt{1+bh^2} = 1 + \frac{1}{2}bh^2 + o(h^2)$$

et, de même :

$$\sqrt{1+ah^2} = 1 + \frac{1}{2}ah^2 + o(h^2).$$

En soustrayant ces deux résultats il vient

$$\sqrt{1+bh^2} - \sqrt{1+ah^2} = \frac{b-a}{2}h^2 + o(h^2)$$

et enfin, en divisant par h :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\sqrt{1+bh^2} - \sqrt{1+ah^2}) &= \frac{b-a}{2}h + o(h) \\ &\sim \frac{b-a}{2}h. \end{aligned}$$

En revenant à $x = 1/h$ on obtient l'équivalent cherché :

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2x} \quad \text{quand} \quad x \quad \text{tend vers} \quad +\infty.$$

On en déduit que $\alpha = 1$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = \frac{b-a}{2} \neq 0.$$

Exercice 7.12 : Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

On ne cherchera à aucun moment à déterminer explicitement f^{-1}.

Bien que l'on ne puisse pas déterminer une expression explicite simple de f^{-1} nous allons cependant en déterminer un développement limité en 0 ; autrement dit, nous nous intéressons ici au comportement de f^{-1} en 0 tout en sachant que l'on n'a pas de formule explicite.

1. Rappelons le théorème de régularité des fonctions réciproques :
si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ ou $n = \infty$) d'un intervalle I dans un intervalle J et que sa dérivée f' ne s'annule pas sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est elle aussi de classe $\mathcal{C}^n$.
Notons que l'on n'impose aucune condition de non-annulation sur les dérivées d'ordres supérieurs : seule f' intervient dans l'hypothèse.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

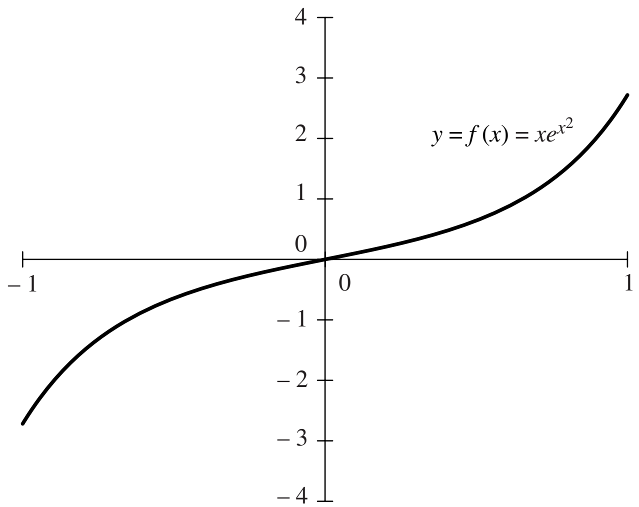
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, d'après les limites usuelles du cours :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Ainsi, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
De plus, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas : sa réciproque est donc elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La représentation graphique de f a l'allure suivante :



2. f^{-1} étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ elle possède des développements limités en tout point à tout ordre.

f étant impaire, f^{-1} aussi : son développement limité à l'ordre 5 en 0 est donc de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

On sait que, pour tout réel x, $f^{-1}(f(x)) = x$: autrement dit, on connaît le développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1} \circ f$ en 0. Il ne nous reste plus qu'à le calculer à l'aide des formules précédentes puis à identifier les coefficients.

Le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction exponentielle est

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

d'où

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$$

et enfin :

$$f(x) = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

On en déduit successivement :

$$\begin{array}{rcl} f(x)^2 & = & x^2 + 2x^4 + o(x^5) \\ f(x)^3 & = & x^3 + 3x^5 + o(x^5) \\ f(x)^4 & = & x^4 + o(x^5) \\ f(x)^5 & = & x^5 + o(x^5) \end{array}$$

d'où le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f^{-1}(f(x))$:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(x)) & = & a(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5) + b(x^3 + 3x^5) + cx^5 + o(x^5) \\ & = & ax + (a+b)x^3 + (\frac{a}{2} + c + 3b)x^5 + o(x^5). \end{array}$$

Vous avez peut-être vu en cours des procédés pour calculer plus rapidement un développement limité de fonction composée ; aucune méthode de ce type n'est exigible et il faut, avant de s'y intéresser, être sûr de bien maîtriser la méthode générale que nous venons de revoir sur deux exemples (le développement limité de e^{x^2} à partir de celui de e^x et celui de $f^{-1} \circ f$).

Mais $f^{-1}(f(x)) = x$ donc, par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ \dfrac{a}{2} + c + \dfrac{3}{b} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

et enfin le développement limité cherché :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5).$$

On aurait bien sûr également abouti en partant d'une expression générale du développement limité de f^{-1} :

$$f^{-1}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + o(x^5).$$

On aurait alors eu à résoudre un système de six équations à six inconnues et on aurait bien trouvé :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) = (0,1,0,-1,0,\frac{5}{2}).$$

Avoir remarqué que f^{-1} est impaire nous a donc épargné bien des calculs !

Ce n'est pas une astuce : lorsque l'on étudie des fonctions, que ce soit pour les tracer, déterminer un développement limité, tracer une courbe paramétrée ou calculer une intégrale, **il est toujours profitable d'étudier les propriétés de symétrie ou de périodicité**.

Dans le cas d'un développement limité en 0, c'est la notion de parité qui permet de diviser par deux le nombre de coefficients à déterminer.

Exercice 7.13 : Développement limité et convexité (sauf PTSI)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable.

On suppose que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2.$$

1. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f''(x) \geqslant f'(x)^2.$$

On pourra effectuer un développement limité à l'ordre 2 pour y au voisinage de 0 de $f(x+y)f(x-y)$.

2. On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. Démontrer que la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

3. En déduire que f est convexe.

1. L'hypothèse fait intervenir deux réels x et y, la conclusion uniquement la variable x. L'indication suggère de fixer le réel x et de considérer l'expression $f(x+y)f(x-y)$ comme une fonction de y.

Soit un réel x. f étant deux fois dérivable, la formule de Taylor-Young fournit le développement limité quand y tend vers 0 :

$$f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{1}{2}y^2 f''(x) + o(y^2).$$

En substituant $-y$ à y il vient également :

$$f(x-y) = f(x) - yf'(x) + \frac{1}{2}y^2 f''(x) + o(y^2).$$

Pour calculer le dévelopepment limité du produit, nul besoin de tout développer : on ne conserve que les termes en y^k avec $k \leqslant 2$.

On en déduit :

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + y^2(f(x)f''(x) - f'(x)^2) + o(y^2)$$

ou encore, en divisant par y^2 :

$$\frac{f(x+y)f(x-y) - f(x)^2}{y^2} = f(x)f''(x) - f'(x)^2 + o(1)$$

Le signe du numérateur du membre de gauche est connu : c'est précisément l'hypothèse de l'exercice !

Le membre de gauche de l'inégalité précédente est positif car $f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2$ par hypothèse et $y^2 > 0$.
On obtient donc, en faisant tendre y vers 0 :

$$0 \leqslant f(x)f''(x) - f'(x)^2.$$

2. f est deux fois dérivable donc $\ln \circ f$ aussi. Il suffit donc de montrer que $(\ln \circ f)''$ est positive. Le calcul de cette dérivée seconde fait précisément intervenir l'expression précédente.

On a successivement, pour tout réel x :

$$(\ln \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(\ln \circ f)''(x) = \frac{f(x)f''(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi, $\ln \circ f$ est convexe.

3. Ici aussi nous pouvons simplement étudier le signe de f'' en l'exprimant à l'aide de $\ln \circ f$.

Avec $g = \ln \circ f$ on a successivement, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(g(x)) \\ f'(x) &= g'(x)\exp(g(x)) \\ f''(x) &= (g''(x) + g'(x)^2)\exp(g(x)) \geqslant 0 \end{aligned}$$

car $g'' \geqslant 0$ d'après ce qui précède.

f est donc convexe.

Exercice 7.14 : Prolongements

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes et proposent chacune une illustration des théorèmes de prolongement de fonctions.*

1. Pour $x \in]-\pi/2,0[\cup]0,\pi/2[$ on pose

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

2.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2).$$

2.b. En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Il y a deux manières de montrer qu'une fonction se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

- on peut montrer que f se prolonge en 0 (*i.e.* possède une limite finie en 0), puis que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 et enfin que $f'(x)$ tend bien vers $f'(0)$ quand x tend vers 0 (autrement dit, vérification de la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) ;
- ou, plus simplement, montrer que f et f' possèdent des limites finies en 0 (autrement dit, application du théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^1$).

Ceci est surprenant : la deuxième méthode semble bien plus faible que la première! Cependant, on démontre dans le cours que le deuxième point entraîne bien que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Tout l'intérêt de cette démarche est qu'il y a bien moins de calculs à faire que dans la première.

Convergence de f en 0

Nous utiliserons bien entendu les développements limités usuels pour lever l'indétermination ; de plus, comme nous avons affaire à un quotient, nous pourrons rédiger de manière plus souple en étudiant séparément le numérateur et le dénominateur et en déterminant pour chacun d'eux un équivalent.

En mettant les fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}. \end{aligned}$$

En effectuant un développement limité du numérateur à l'ordre 3 en 0 à l'aide de la formule connue

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} x - \sin(x) &= \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

D'autre part, $\sin(x) \sim x$ donc le dénominateur est équivalent à x^2 ; on en déduit :

$$f(x) \sim \frac{x}{6}$$

et, en particulier :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Convergence de f' en 0

Le problème est exactement le même : il faut lever une forme indéterminée à l'aide de développements limités.

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\sin^2(x) - x^2\cos(x)}{x^2\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

L'équivalent usuel $\sin(x) \sim x$ donne un équivalent du dénominateur :

$$x^2\sin^2(x) \sim x^4.$$

Pour le numérateur, effectuons un développement limité à l'ordre 4 en 0. On sait que

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

d'où, d'une part :

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

et, d'autre part :

$$x^2\cos(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

soit enfin, en soustrayant :

$$\sin^2(x) - x^2\cos(x) = \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

ce que l'on peut également écrire avec un équivalent :

$$\sin^2(x) - x^2\cos(x) \sim \frac{1}{6}x^4.$$

Ainsi :

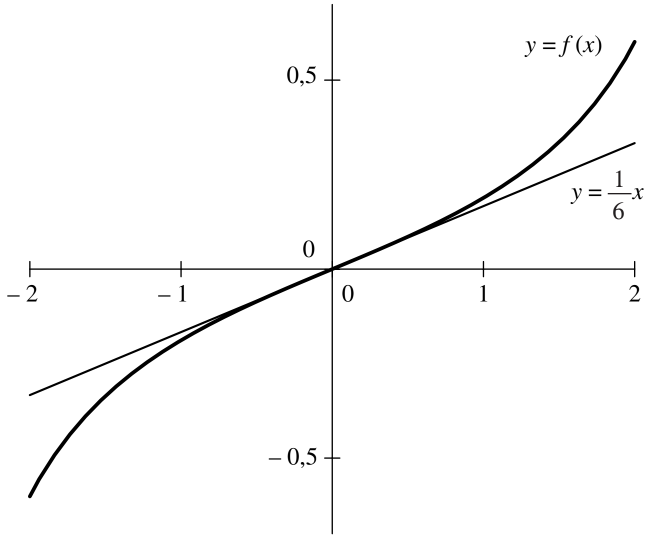
$$f'(x) \sim \frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4} = \frac{1}{6}$$

i.e. $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{6}$.

Conclusion

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on prolonge f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ en posant $f(0) = 0$ et on a alors $f'(0) = \frac{1}{6}$.

Représentons graphiquement f et sa tangente en 0 :



2.a. Il est naturel de tenter une démonstration par récurrence.
Pour cela, voyons d'abord comment passer d'une formule du type

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$$

à

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(1/x)\exp(-1/x^2).$$

Partant de $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$ on obtient, en dérivant :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_n(1/x)\right)\exp(-1/x^2) + P_n(1/x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\exp(-1/x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}P_n'(1/x)\exp(-1/x^2) + P_n(1/x) \times \left(\frac{2}{x^3}\right)\exp(-1/x^2) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3}P_n(1/x)\right)\exp(-1/x^2) \end{aligned}$$

Remarquons que l'expression à dériver est un produit de deux fonctions composées et qu'il faut donc prendre soin de détailler soigneusement les étapes au brouillon pour ne pas se tromper…

Il faut reconnaître ici une expression de la forme $P_{n+1}(1/x)\exp(-1/x^2)$, soit

$$P_{n+1}(1/x) = -\frac{1}{x^2}P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3}P_n(1/x).$$

Or

$$-\frac{1}{x^2}P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3}P_n(1/x) = -(1/x)^2P_n'(1/x) + 2(1/x)^3P_n(1/x)$$

soit, en posant $y = 1/x$,

$$P_{n+1}(y) = -y^2P_n'(y) + 2y^3P_n(y).$$

Nous avons donc ainsi trouvé l'expression que doit avoir P_{n+1} en fonction de P_n.

Pour rédiger de manière plus lisible on pourra poser l'expression de P_{n+1} puis vérifier qu'elle convient.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$ ».

- H_0 est vraie : en effet, le polynôme $P_0 = 1$ convient.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. On a donc un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$.

En dérivant cette relation par rapport à x on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3}P_n(1/x)\right)\exp(-1/x^2).$$

Posons $P_{n+1}(X) = -X^2 P_n'(X) + 2X^3 P_n(X)$. Alors P_{n+1} est un polynôme et on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(1/x)\exp(-1/x^2)$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b. Rappelons le théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^\infty$:
si une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ possède une limite finie ℓ_0 en 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sa dérivée n-ième possède une limite finie ℓ_n en 0, alors :

- en posant $f(0) = \ell_0$ on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$;
- de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(0) = \ell_n$.

Pour calculer ces limites dans le cas traité ici on peut se ramener très simplement à des limites usuelles bien connues.

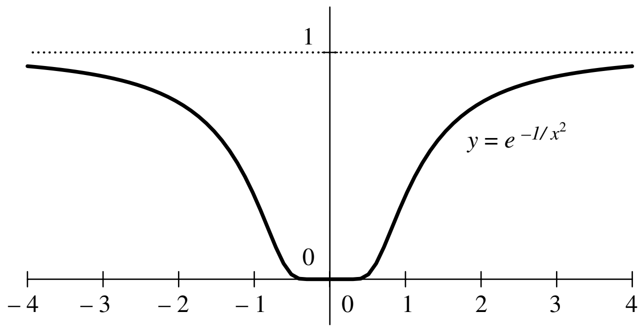
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Ainsi, en posant $f(0) = 0$, f est prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant, de plus, $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La formule de Taylor montre que f possède un développement limité à tout ordre en 0 et que $f(x) = o(x^n)$ en 0. Pourtant, f n'est pas la fonction nulle : elle ne s'annule même qu'en 0.
Cet exemple montre que la connaissance des développements limités à tout ordre en 0 d'une fonction ne permet pas de déterminer cette fonction : deux fonctions distinctes peuvent avoir les mêmes développements limités.

On peut représenter graphiquement cette fonction : d'après les propriétés usuelles elle est positive, paire, tend vers 1 par valeurs inférieures en $\pm\infty$.

Nous venons de voir qu'en 0 elle tend vers 0 plus vite que toute puissance, autrement dit de manière très rapide : la courbe semble « plate » et pourtant f ne s'annule qu'en 0, contrairement aux apparences.



Exercice 7.15 : Synthèse : prolongement de fonction et étude de suite implicite

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f possède un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$.

2. Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = 1 + \dfrac{1}{n}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

5. Déterminer un équivalent simple de u_n.

Les premières questions sont relativement simples car d'une forme classique : les deux premières se traitent par des arguments de limites et de développements limités pour lever les indéterminations ; la troisième est typique d'une application du théorème des valeurs intermédiaires.

En revanche, les deux dernières questions sont plus difficiles ; en effet, la suite en question est définie implicitement, il n'y a donc pas de méthode systématique pour l'étudier et aucune formule simple ne nous permet de voir à l'avance quel théorème invoquer.

1. Nous pouvons bien sûr trouver cette limite avec un développement limité de l'exponentielle mais nous sommes ici dans une situation plus simple déjà vue en terminale : il s'agit de l'inverse du taux d'accroissement de l'exponentielle en 0.

f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues.
De plus, d'après les limites usuelles du cours :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

f possède donc un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$.

2. Nous allons utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et nous savons déjà que f possède une limite finie en 0 ; il n'y a plus qu'à prouver la convergence de f' en 0.

Notons tout d'abord que f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
De plus on a, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$.
Afin de déterminer la limite de f' en 0, effectuons les développements limités à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur :

$$\begin{aligned}(1-x)e^x - 1 &= (1-x)(1+x+\frac{1}{2}x^2) - 1 + o(x^2)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e^x-1)^2 &= (x+\frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^2)\\ &= x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

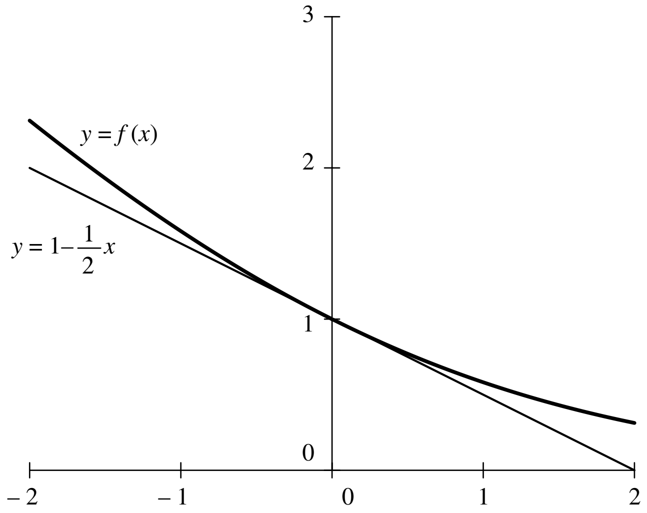
On a donc les équivalents en 0 :

$$\begin{cases}(1-x)e^x - 1 & \sim \; -\dfrac{1}{2}x^2\\ (e^x-1)^2 & \sim \; x^2\end{cases}$$

d'où, en effectuant le quotient : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée converge en 0. D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, de plus, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Nous pouvons représenter graphiquement f et sa tangente en 0 :



On peut montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ en effectuant le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 : on trouve alors $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + o(x)$.

La question est cependant plus contraignante : on demande de montrer que f est dérivable en 0 **et** que la fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$. Le calcul précédent est donc insuffisant.

Pour démontrer un tel résultat, le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est intéressant car il ne nécessite pas, dans ses hypothèses, que f soit dérivable en 0 : ceci est une conséquence de ce théorème.

3. L'énoncé est typique d'une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires ; nous allons donc étudier la fonction f, ce qui a été presque entièrement fait plus haut.

f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante.
De plus, d'après les limites usuelles du cours :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$.

4. L'approche de cette question est malaisée car la suite est définie implicitement. Cependant, au vu de la représentation graphique de f, on voit que cette suite est croissante et négative, ce qui permet déjà de montrer sa convergence.

Autrement dit, nous allons utiliser la monotonie de f pour étudier celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$$

soit, par définition de u_n et u_{n+1} :

$$f(u_{n+1}) < f(u_n).$$

f étant strictement décroissante :

$$u_{n+1} > u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) > 1 = f(0)$ donc, f étant strictement décroissante, $u_n < 0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

De $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$ on tire en faisant tendre n vers $+\infty$, f étant continue : $f(\ell) = 1$.

Or $f(0) = 1$ et f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ell = 0$, soit encore $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Les arguments que nous venons d'utiliser sont donc :

- le théorème de la limite monotone appliqué à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour démontrer **l'existence** de la limite ;
- l'utilisation de la continuité de f (plus précisément, de la caractérisation séquentielle de la continuité) pour **calculer** cette limite.

Ainsi, pour calculer une limite, il peut être nécessaire de démontrer de manière abstraite l'existence de cette limite pour ensuite l'injecter dans des formules précédemment établies et en déduire sa valeur.

Une autre solution est de transformer l'expression : au lieu d'avoir u_n implicitement, nous allons chercher à écrire $u_n = g(v_n)$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite « simple ».

Démonstration alternative :

D'après l'étude précédente, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

En notant g la bijection réciproque de f, on a donc : $u_n = g\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Or g est continue, car réciproque d'une bijection continue entre deux intervalles ; on a donc

$$\lim_{n\to\infty} g\left(1+\frac{1}{n}\right) = g(1).$$

Or $f(0) = 1$, d'où $g(1) = 0$ et enfin : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = g(1) = 0$.

Cette deuxième méthode n'est pas anecdotique : elle utilise le théorème de la bijection (continuité de la réciproque) et présente donc un intérêt. À vous de choisir laquelle vous plaît le plus, mais les deux constituent des compétences exigibles.

Notez qu'à aucun moment nous n'avons explicité g ; nous n'en connaissons d'ailleurs aucune expression en terme de fonctions usuelles mais ceci n'a pas d'importance dans cette question, seule sa continuité intervient.

5. Avec les notations de l'exercice :

$$1+\frac{1}{n} = f(u_n) = \frac{u_n}{e^{u_n}-1}$$

Or on sait que $e^x - 1 \sim x$ quand x tend vers 0 ; comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ on a donc $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ soit, en remplaçant dans l'expression ci-dessus : $1 \sim 1 + \dfrac{1}{n}\ldots$ ce qui n'est pas très intéressant.

Lorsque les équivalents de fonctions ne suffisent pas, il faut passer à la vitesse supérieure : les développements limités.

Dans le raisonnement précédent, on a en fait utilisé (et même redémontré) que $f(0) = 1$ et que f est continue en 0, *i.e.* $f(x) = 0 + o(x)$. Autrement dit, nous avons utilisé le développement limité à l'ordre 0 de f en 0.

Nous allons donc reprendre tout ceci mais cette fois à l'ordre 1.

On a

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

d'où, comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

$$f(u_n) = 1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)$$

ce qui donne

$$1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$$

et enfin

$$\frac{1}{n} = -\frac{u_n}{2} + o(u_n).$$

On en déduit

$$u_n \sim -\frac{2}{n}.$$

8

Intégration

Exercice 8.1 : Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, strictement positive, puis que $I_{n+1} \sim I_n$.

3. En considérant le produit $(n+1)I_{n+1}I_n$ déterminer un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Ce dernier calcul n'utilise que la relation de la première question.

1. Les relations de récurrence entre les termes d'une suite définie par des intégrales peuvent très souvent s'obtenir à l'aide d'une intégration par parties.

Écrivons $\sin^{n+2}(t) = \sin^{n+1}(t)\sin(t)$ et intégrons par parties en primitivant $\sin(t)$ et dérivant $\sin^{n+1}(t)$:

$$I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(t)\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t.$$

En utilisant la relation $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ on voit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = I_n - I_{n+2}$$

d'où, en remplaçant dans la première relation :

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

d'où l'on tire la relation désirée :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

2. Nous devons visiblement utiliser la croissance de l'intégrale, *i.e.* intégrer une inégalité entre les fonctions.
Il est ensuite demandé de montrer que $I_{n+1} \sim I_n$. Une possibilité intéressante est de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$: en effet, les inégalités précédemment obtenues devraient nous permettre d'utiliser le théorème d'encadrement.

Pour tout $t \in [0,\pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ d'où, en intégrant sur $[0,\pi/2]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$: la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

De plus, étant donné $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sin^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,\pi/2]$. Son intégrale sur $[0,\pi/2]$ est donc strictement positive, *i.e.* : $I_n > 0$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. En divisant par I_n, qui est strictement positif, et en utilisant la relation de récurrence établie dans la première question, on obtient :

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

d'où, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, soit encore : $I_{n+1} \sim I_n$.

Il y a effectivement quelque chose à démontrer ici : en effet, étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on n'a pas forcément $u_{n+1} \sim u_n$ (considérer par exemple $u_n = 2^n$).

3. Nous avons déjà une relation entre I_{n+2} et I_n ; nous pouvons donc en déduire une relation entre $(n+2)I_{n+2}I_{n+1}$ et $(n+1)I_{n+1}I_n$.

$$\begin{aligned}(n+1)I_{n+1}I_n &= (n+1)I_{n+1}\frac{n+2}{n+1}I_{n+2}\\ &= (n+2)I_{n+2}I_{n+1}.\end{aligned}$$

La suite de terme général $(n+1)I_{n+1}I_n$ est constante.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0$.

Or : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, $I_{n+1} \sim I_n$ d'après la question précédente et $n+1 \sim n$ d'où $(n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$.

Comme $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ on a donc $nI_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ d'où, d'après les règles de calcul sur les équivalents et puisque $I_n \geqslant 0$:

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Une récurrence s'impose ! En effet, on connaît une relation de récurrence entre I_{2n} et $I_{2n+2} = I_{2(n+1)}$.

> Par définition, $(2n)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)$. Une erreur fréquente consiste à oublier les facteurs impairs…
> En particulier, $(2n+2)! = (2n)! \times (2n+1) \times (2n+2)$; il faudra donc, pour obtenir $(2n+2)!$, faire apparaître les deux facteurs $2n+1$ et $2n+2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ ».

- H_0 est vraie : en effet, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avions démontré, dans l'exercice **1.7**, qu'il existe un réel strictement positif λ tel que

$$n! \sim \lambda n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

On a donc :

$$(2n)! \sim \lambda (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}$$

mais aussi

$$2^n n! \sim \lambda (2n)^n e^{-n} \sqrt{n}$$

et

$$(2^n n!)^2 \sim \lambda^2 (2n)^{2n} e^{-2n} n$$

soit, d'après la formule ci-dessus, une fois toutes les simplifications faites :

$$I_{2n} \sim \frac{\pi}{\lambda \sqrt{2n}}.$$

Or on a montré que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, d'où $I_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

De ces deux équivalents on tire $\lambda = \sqrt{2\pi}$, *i.e.* :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Il s'agit de la *formule de Stirling*, au programme de deuxième année.

Exercice 8.2 : Changements de variable usuels : règles de Bioche

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} \mathrm{d}t.$$

Changement de variable

Nous cherchons une primitive d'une fraction rationnelle en les fonctions circulaires : nous pouvons donc appliquer les règles de Bioche.
En changeant t en $-t$ il vient :

$$\frac{1}{\sin(-t)+\tan(-t)} \quad d(-t) = \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt.$$

donc le changement de variable $u = \cos(t)$ permettra de se ramener à une fraction rationnelle en u.
L'élément différentiel sera alors $du = -\sin(t)dt$.
Il faut donc à la fois faire apparaître $\sin(t)$ au numérateur mais aussi éliminer les fonctions sinus et tangente pour ne plus avoir, hormis ce nouvel élément différentiel, que des termes en $\cos(t)$.

$$\frac{1}{\sin(t)+\tan(t)} = \frac{\sin(t)}{\sin^2(t)+\sin(t)\tan(t)}$$

et

$$\sin(t)\tan(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.$$

Le dénominateur est donc :

$$\begin{aligned}\sin^2(t)+\sin(t)\tan(t) &= \sin^2(t)\left(1+\frac{1}{\cos(t)}\right)\\ &= (1-\cos^2(t))\left(1+\frac{1}{\cos(t)}\right)\end{aligned}$$

et la fraction peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{\sin(t)+\tan(t)} = \frac{\cos(t)\sin(t)}{(1-\cos^2(t))(1+\cos(t))}$$

ce qui donne, avec $u = \cos(t)$ et $du = -\sin(t)dt$:

$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt = -\int \frac{u}{(1-u^2)(1+u)}du = \int \frac{u}{(u^2-1)(1+u)}du.$$

Posons $u = \cos(t)$. On a alors $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$.

De plus :

$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\mathrm{d}t = \int \frac{\cos(t)\sin(t)}{(1-\cos^2(t))(1+\cos(t))}\mathrm{d}t$$

soit, avec le changement de variable suggéré :

$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\mathrm{d}t = -\int \frac{u}{(1-u^2)(1+u)}\mathrm{d}u = \int \frac{u}{(u^2-1)(1+u)}\mathrm{d}u.$$

Décomposition en éléments simples

Il faut désormais décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle en u afin d'en déterminer aisément une primitive.

En factorisant le dénominateur il vient :

$$\frac{u}{(u^2-1)(1+u)} = \frac{u}{(u-1)(1+u)^2}$$

et il existe donc trois réels a, b et c tels que

$$\frac{u}{(u^2-1)(1+u)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2}.$$

On constate que 1 est un pôle simple alors que -1 est un pôle double.

Pour calculer a, la méthode est simple : multiplier par $u-1$, simplifier, puis faire $u = 1$.

Pour b et c, c'est plus difficile car tout ne se simplifiera pas aussi bien ; on commencera par calculer le coefficient du terme ayant la plus grande puissance, *i.e.* c, en multipliant par $(1+u)^2$, puis en prenant, après simplification, $u = -1$.

- En multipliant par $u-1$ on obtient :

$$\frac{u}{(1+u)^2} = a + \frac{b(u-1)}{1+u} + \frac{c(u-1)}{(1+u)^2}$$

soit, pour $u = 1$: $a = \dfrac{1}{4}$.

- En multipliant par $(1+u)^2$ il vient :

$$\frac{u}{u-1} = \frac{a(1+u)^2}{u-1} + b(1+u) + c$$

soit, pour $u = -1$: $c = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$\frac{u}{(u-1)(1+u)^2} = \frac{1/4}{u-1} + \frac{b}{1+u} + \frac{1/2}{(1+u)^2}.$$

Si on multiplie par $1+u$ pour ensuite prendre $u = -1$, nous tomberons sur une forme indéterminée à cause des termes en $(1+u)^2$.
La solution est de regrouper tous ces termes ensemble : tout se simplifiera alors.

Éliminons le terme de degré 2 en le changeant de membre :

$$\begin{aligned}\frac{1/4}{u-1} + \frac{b}{1+u} &= \frac{u}{(u-1)(1+u)^2} - \frac{1/2}{(1+u)^2}\\ &= \frac{u}{(u-1)(1+u)^2} - \frac{1/2\,(u-1)}{(u-1)(1+u)^2}\\ &= \frac{1/2\,(u+1)}{(u-1)(1+u)^2}\\ &= \frac{1/2}{(u-1)(1+u)}\end{aligned}$$

D'où, en multipliant par $1+u$:

$$\frac{1/4\,(1+u)}{u-1} + b = \frac{1/2}{(u-1)}$$

et enfin, pour $u = -1$: $b = -\dfrac{1}{4}$.

- On a donc :

$$\frac{u}{(u^2-1)(1+u)} = \frac{u}{(u-1)(1+u)^2} = \frac{1/4}{u-1} - \frac{1/4}{1+u} + \frac{1/2}{(1+u)^2}.$$

Primitives des éléments simples

Chaque terme possède une primitive usuelle bien connue.

D'après les formules usuelles nous avons successivement :

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{(u-1)(1+u)^2}\mathrm{d}u &= \int \left(\frac{1/4}{u-1} - \frac{1/4}{1+u} + \frac{1/2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\ln(|u-1|) - \frac{1}{4}\ln(|1+u|) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u}\end{aligned}$$

Retour à la variable initiale

En remplaçant u par $\cos(t)$ il apparaîtra deux termes simplifiables par les formules de trigonométrie : $1+\cos(t) = 2\cos^2(t/2)$ et $1-\cos(t) = 2\sin^2(t/2)$, sans oublier que $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$; nous pourrons donc ainsi tout exprimer en termes de la seule fonction tangente.

Comme $u = \cos(t)$ on a

$$\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \left|\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}\right| = \tan^2(t/2)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u} &= \frac{1}{1+\cos(t)} \\ &= \frac{1}{2\cos^2(t/2)} \\ &= \frac{1}{2}(1+\tan^2(t/2))\end{aligned}$$

soit, en remplaçant dans la primitive trouvée plus haut :

$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|\tan(t/2)| - \frac{1}{4}(1+\tan^2(t/2)).$$

Pour finir, notons que l'on cherchait ici une primitive de la fonction et que le résultat est donc défini à une constante additive près ; on peut donc oublier la constante additive $-\frac{1}{4}$ dans le résultat et il est tout aussi correct d'écrire :

$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|\tan(t/2)| - \frac{1}{4}\tan^2(t/2).$$

Exercice 8.3 : Changements de variable usuels : $u = \tan(t/2)$

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin(t)}\mathrm{d}t$$

en posant $u = \tan(t/2)$.
Pour simplifier le résultat on admettra la formule suivante :

$$\text{si } a > 0,\ \mathrm{Arctan}(a) + \mathrm{Arctan}(1/a) = \pi/2$$

Les règles de Bioche ne permettent pas de trouver un changement de variable plus simple en sinus ou cosinus.

Le changement de variable $u = \tan(t/2)$ fonctionne cependant dans tous les cas pour les fractions rationnelles de fonctions circulaires comme ici.

Nous savons en effet qu'alors $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$ et (mais c'est inutile ici) $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

De plus, on a

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\tan^2(t/2))\mathrm{d}t = \frac{1+u^2}{2}\mathrm{d}t$$

soit encore $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

Ainsi, nous aurons bien, tous calculs faits, l'intégrale d'une fraction rationnelle en u.

En posant $u = \tan(t/2)$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ on a :

- $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$;
- $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.
- Pour $t = -\pi/2$ (resp. $\pi/2$), $u = -1$ (resp. 1) ;

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin(t)}\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+\dfrac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2u^2+u+2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Nous nous sommes ainsi bien ramenés à une intégrale de fraction rationnelle, et même mieux encore : elle est déjà décomposée en éléments simples! Nous échappons donc à cette étape fastidieuse.

En l'occurence, il s'agit de l'inverse d'un trinôme irréductible du second degré ; nous allons donc le mettre sous forme canonique puis effectuer un changement de variable affine pour faire apparaître une expression de la forme $\frac{1}{y^2+1}$ qui pourra alors s'intégrer avec la fonction arctangente.

On a, en mettant le trinôme du dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned} 2u^2+u+2 &= 2(u^2+\frac{1}{2}u+1) \\ &= 2\left(\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\frac{1}{2u^2+u+2}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{8}{15}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(\frac{4u+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y=\frac{4u+1}{\sqrt{15}}$ on a :

- $\left(\frac{4u+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1=y^2+1$;
- $\mathrm{d}y=\frac{4}{\sqrt{15}}\mathrm{d}u$ soit $\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{d}y$
- Pour $u=-1$ (resp. 1), $y=-\frac{3}{\sqrt{15}}$ (resp. $\frac{5}{\sqrt{15}}$) ;

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{8}{15}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(\frac{4u+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\mathrm{d}u &= \frac{8}{15}\int_{-3/\sqrt{15}}^{5/\sqrt{15}}\frac{1}{y^2+1}\,\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}\int_{-3/\sqrt{15}}^{5/\sqrt{15}}\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y\\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}\left[\mathrm{Arctan}(y)\right]_{-3/\sqrt{15}}^{5/\sqrt{15}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}(\mathrm{Arctan}(5/\sqrt{15})-\mathrm{Arctan}(-3/\sqrt{15}))\\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}(\mathrm{Arctan}(5/\sqrt{15})+\mathrm{Arctan}(3/\sqrt{15}))
\end{aligned}$$

Enfin, vu que $\mathrm{Arctan}(a)+\mathrm{Arctan}(1/a)=\frac{\pi}{2}$ si $a>0$ on obtient, pour $a=5/\sqrt{15}$ (et $1/a=3/\sqrt{15}$) :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+\sin(t)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

Une idée de démonstration de cette formule sur les Arctan est proposée à la fin de l'exercice **5.11**.

Exercice 8.4 : Changements de variable usuels : $u = e^x$

Calculer

$$\int\frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$$

à l'aide du changement de variable $u = e^x$.

Toute intégrale de la forme $\int F(e^x)\mathrm{d}x$, avec F une fraction rationnelle, peut se calculer simplement à l'aide du changement de variable $u = e^x$: on obtient alors à coup sûr une intégrale de fraction rationnelle.

Ceci s'applique, en particulier, en présence de fonctions hyperboliques. Nous allons exprimer la fonction à intégrer à l'aide de la seule fonction exponentielle.

$$\frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}=\frac{e^{x/2}\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}$$

soit, en développant le numérateur :

$$\frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}}$$

et enfin, en multipliant numérateur et dénominateur par e^x :

$$\frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}.$$

Avec $u = e^x$ on a donc

$$\frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{u^2 + u}{u^2 + 1}.$$

Afin de terminer le changement de variable, il faut déterminer le nouvel élément différentiel.

Comme on a posé $u = e^x$, on a $x = \ln(u)$, donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$. Il ne reste plus qu'à écrire le résultat.

En posant $u = e^x$ il vient :

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x &= \int \frac{u^2 + u}{u^2 + 1} \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{u + 1}{u^2 + 1}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Nous allons essayer de faire apparaître un terme en $f'(u)/f(u)$, dont une primitive sera $\ln(|f(u)|)$.

Le dénominateur étant $u^2 + 1$, nous voulons voir l'expression $\frac{2u}{u^2 + 1}$. En ajustant le coefficient dominant du numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{u + 1}{u^2 + 1} &= \frac{1}{2}\frac{2u + 2}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u^2 + 1} \end{aligned}$$

et chaque terme possède une primitive usuelle simple.

Tout d'abord

$$\frac{u+1}{u^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}$$

soit, d'après les formules usuelles du cours,

$$\int \frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \mathrm{Arctan}(u)$$

et enfin, en revenant à la variable initiale :

$$\int \frac{e^{x/2}\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \mathrm{Arctan}(e^x)$$

Exercice 8.5 : Intégrale de Gauβ

Cet exercice utilise des résultats de l'exercice **8.1** (intégrales de Wallis).

Pour $a \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale de Wallis vue précédemment.

1. Montrer que F est bien définie et possède une limite ℓ (éventuellement $+\infty$) quand a tend vers $+\infty$.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

2. À l'aide d'un argument de convexité montrer que, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3. On intègre de 0 à $\sqrt{n}$ les inégalités précédentes. On effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ dans celle de gauche et $t = \sqrt{n}\tan(v)$ dans celle de droite. Quel encadrement obtient-on ? On fera apparaître les intégrales de Wallis.

4. À l'aide de l'équivalent de I_n trouvé au **8.1** donner la valeur de ℓ.

1. Il suffit d'étudier la fonction F, ce qui est facile puisque sa dérivée n'est autre que la fonction sous l'intégrale.

F est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ nulle en 0. Sa dérivée est positive donc cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$: d'après le théorème de la limite monotone elle possède donc une limite en $+\infty$ qui peut éventuellement être $+\infty$.

2. La difficulté de ce genre de question est de trouver la fonction convexe à laquelle on va appliquer les inégalités de convexité. Cependant, la fonction exponentielle

joue visiblement un rôle central dans l'exercice et nous allons essayer de démarrer avec la plus simple inégalité de convexité la concernant : pour tout réel x, $1 + x \leqslant e^x$.

Pour faire apparaître $1 - \frac{t^2}{n}$, nous remplaçons simplement x par $-\frac{t^2}{n}$ et on obtient $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-t^2/n}$.

Il n'y a plus qu'à élever à la puissance n pour obtenir ce que l'on souhaite… Mais on ne peut en général pas élever à une puissance donnée des inégalités. C'est parce que les deux membres sont **positifs** que ceci est possible.

On a l'inégalité de convexité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant e^x.$$

Etant donné un réel $t \in [0, \sqrt{n}]$ on a donc :

$$0 \leqslant 1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-t^2/n}.$$

Comme ces réels sont positifs et $n \in \mathbb{N}^*$ on en déduit en élevant à la puissance n :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}.$$

De même, pour $t \in [0, \sqrt{n}]$:

$$0 < 1 + \frac{t^2}{n} \leqslant e^{t^2/n}.$$

Comme ces réels sont strictement positifs on obtient en élevant à la puissance n :

$$0 < \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{t^2}$$

et enfin, en considérant l'inverse :

$$e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

3. L'intégration suggérée donne l'encadrement :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Les changements de variables étant imposés par l'énoncé, il ne reste plus qu'à appliquer les formules du cours.

Membre de gauche

En posant $t = \sqrt{n}\sin(u)$ et $u \in [-\pi/2; \pi/2]$ on a :

- Pour $t = 0$ (resp. $\sqrt{n}$), $u = 0$ (resp. $\pi/2$) ;
- $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \left(1 - \sin^2(u)\right)^n = \cos^{2n}(u)$;
- $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u)(\sqrt{n}\cos(u))\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\, I_{2n+1}.\end{aligned}$$

Membre de droite

En posant $t = \sqrt{n}\tan(v)$ et $v \in]-\pi/2; \pi/2[$ on a :

- Pour $t = 0$ (resp. $\sqrt{n}$), $u = 0$ (resp. $\pi/4$) ;
- $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \tan^2(v)\right)^{-n}$;
- $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\,(1 + \tan^2(v))\mathrm{d}v$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(v)\right)^{-n} (\sqrt{n}(1 + \tan^2(v))\mathrm{d}v \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \left(1 + \tan^2(v)\right)^{-n+1} \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Afin de faire apparaître une intégrale de Wallis on utilise la relation $1+\tan^2(v)=\dfrac{1}{\cos^2(v)}$, d'où :

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}(v)\mathrm{d}v.$$

Enfin, la fonction $v\mapsto\cos^{2n-2}(v)$ est positive sur $[0,\pi/2]$ et $[0,\pi/4]\subset[0,\pi/2]$ d'où :

$$\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}(v)\mathrm{d}v\leqslant\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}(v)\mathrm{d}v=I_{2n-2}$$

soit, en reportant dans le calcul initial :

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{n}\,I_{2n-2}.$$

Conclusion

Comme $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\mathrm{d}t=F(\sqrt{n})$ par définition de F on a donc :

$$\sqrt{n}\,I_{2n+1}\leqslant F(\sqrt{n})\leqslant\sqrt{n}\,I_{2n-2}.$$

4. Nous pouvons utiliser les équivalents des intégrales de Wallis afin de déterminer les limites des expressions qui interviennent ici.

Calculons la limite quand n tend vers $+\infty$ de chaque membre de l'encadrement.

On a $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc

$$\begin{aligned}I_{2n+1}&\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}\\&\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

car $4n+2\sim 4n$ donc $\sqrt{4n+2}\sim 2\sqrt{n}$.

On a donc : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}\,I_{2n+1})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

De même :

$$\begin{aligned} I_{2n-2} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} \\ &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}\, I_{2n-2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Enfin, par définition, $\lim\limits_{n\to\infty} F(\sqrt{n}) = \ell$.

On obtient donc, en passant à la limite dans l'encadrement précédent :

$$\ell = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ce que l'on notera abusivement (avec une notation qui sera précisée en deuxième année) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 8.6 : Sommes de Riemann

1. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{-3/2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{n+k} \right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}}$.

1. Il faut faire apparaître une expression de la forme :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

dont on sait, d'après le cours, qu'elle converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.

Le plus simple, pour cela, est d'abord de faire apparaître dans le terme général de la somme le quotient k/n, puis un facteur $1/n$ devant la somme ; pour cela nous utiliserons la relation $\sqrt{n+k} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}$.

$$n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

qui tend vers $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers l'infini.

Il faut bien sûr désormais calculer cette intégrale ! Ici, le calcul est simple car on reconnaît une dérivée usuelle ; en pratique, il peut bien sûr arriver que l'on obtienne des intégrales plus compliquées nécessitant une intégration par parties ou un changement de variable.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1+x)^{1/2}\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$

2. Il faut tout d'abord faire apparaîte des sommes de Riemann là où on n'en voit pas encore !

L'expression donnée faisant intervenir des factorielles et des puissances, c'est-à-dire des produits, nous allons plutôt considérer son logarithme.

Tout d'abord :

$$n!\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!}=(n+1)\cdots(2n).$$

On a donc, en divisant chacun des n termes du produit par n :

$$\frac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

et enfin

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \mapsto \ln(1+x)$ sur le segment $[0,1]$, sa limite est donc $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

On reconnaît l'un des exemples classiques d'intégrale se calculant par parties. Plus précisément, nous allons voir $\ln(1+x)$ comme le produit $1 \times \ln(1+x)$ et choisir comme primitive de la constante 1 la fonction $x \mapsto x+1$.

Bien sûr, si l'on avait plutôt choisi x comme primitive de 1 nous aurions abouti mais au prix de calculs supplémentaires. Ici, le choix judicieux de la constante d'intégration permet de simplifier l'intégrale apparaissant dans le second membre de la formule d'intégration par parties.

Ce choix judicieux d'une primitive dans une intégration par parties a déjà été rencontré en cours dans la démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{d}x = 2\ln(2)-1.$$

C'est le logarithme de la limite demandée, et cette limite est donc

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}} = \exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e}.$$

Exercice 8.7 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note

$$\begin{cases} M_0 = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \\ M_2 = \sup\{|f''(x)| : x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

1. On suppose que $M_2 = 0$. Montrer que f est constante.

On suppose dans la suite que $M_2 > 0$.

2. On fixe un réel a.
Montrer que

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^*, |f'(a)| \leqslant \varphi(h)$$

où la fonction φ est définie par :

$$\varphi(h) = \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

On pourra pour cela commencer par écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange sur les intervalles $[a,a+h]$ et $[a-h,a]$.

3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que, en posant

$$M_1 = \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

on a la majoration :

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

On remarque que cette majoration reste valable si $M_2 = 0$.

1. M_2 est un majorant de $|f''|$ qui est par ailleurs positive : si $M_2 = 0$ alors $f'' = 0$, d'où f' constante et enfin f est affine, *i.e.* est polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Il reste à déterminer ses coefficients : le raisonnement ci-dessus montre que sous l'hypothèse de la question la fonction f est d'une certaine forme mais la réciproque n'est pas forcément vraie !
C'est même clair : une fonction affine n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$... sauf si elle est constante.
Autrement dit, nous venons encore une fois de raisonner par analyse-synthèse.

Si $M_2 = 0$, $f'' = 0$. f' est donc constante et f est une fonction affine : il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

Cependant, f est bornée. On a donc $a = 0$ et ainsi f est constante.

2. Rappelons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I alors, pour tous éléments a et b de I :

$$|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[a,b]$.

Dans la situation présentée ici, on peut prendre $M = M_2$ et $b = a \pm h$, ce qui fournit les deux inégalités :

$$|f(a+h) - (f(a) + hf'(a))| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2$$

et

$$|f(a-h) - (f(a) - hf'(a))| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2.$$

La difficulté est d'obtenir une majoration de $|f'(a)|$; on peut tenter de faire apparaître l'inégalité triangulaire.

Pour voir comment faire, commençons par manipuler les expressions ci-dessus sans les valeurs absolues. Il est alors simple de faire apparaître $f'(a)$ par soustraction :

$$\big(f(a+h) - (f(a) + hf'(a))\big) - \big(f(a-h) - (f(a) - hf'(a))\big)$$
$$= -2hf'(a) + f(a+h) - f(a-h)$$

puis on isole $f'(a)$ en changeant le terme $f(a+h) - f(a-h)$ de membre.

On a la relation :

$$\begin{aligned} -2hf'(a) &= \big(f(a+h) - (f(a) + hf'(a))\big) \\ &\quad - \big(f(a-h) - (f(a) - hf'(a))\big) + f(a-h) - f(a+h) \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} |2hf'(a)| &\leqslant |f(a+h) - (f(a) + hf'(a))| + |f(a-h) \\ &\qquad - (f(a) - hf'(a))| + |f(a-h)| + |f(a+h)| \\ &\leqslant h^2 M_2 + 2M_0 \\ &\leqslant 2h\,\varphi(h) \end{aligned}$$

car, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, les quantités $|f(a+h) - (f(a) + hf'(a))|$ et $|f(a-h) - (f(a) - hf'(a))|$ sont toutes deux majorées par $\dfrac{h^2}{2} M_2$.

En divisant par $2h$, qui est strictement positif, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$|f'(a)| \leqslant \varphi(h).$$

3. Cette majoration est vraie pour tout réel a et tout réel strictement positif h ; en particulier, en prenant $h = 1$, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, |f'(a)| \leqslant \varphi(1)$$

ce qui montre que f' est bornée sur $\mathbb{R}$: ainsi, M_1 est bien défini.

Pour tout réel $h > 0$ le nombre $\varphi(h)$ est un majorant de $|f'|$: on a donc $M_1 \leqslant \varphi(h)$.

Il n'y a plus qu'à déterminer l'éventuel minimum m de φ sur $\mathbb{R}_+^*$: on aura alors $M_1 \leqslant m$. Pour cela, il suffit d'étudier φ.

Étudions la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

φ est dérivable et on a, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi'(h) = -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$$

donc φ possède un minimum en

$$h_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}.$$

En particulier, $M_1 \leqslant \varphi(h_0)$. Or

$$\begin{aligned}\varphi(h_0) &= M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} \\ &= \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} \\ &= \sqrt{2M_0M_2}\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé :

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

Nous avions ici une relation vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.
Dans cette situation, nous avons le choix entre fixer a et considérer ainsi une minoration de la fonction φ par une constante ou fixer h et obtenir ainsi une majoration de $|f'|$ par une constante.

Exercice 8.8 : Lemme de Riemann-Lebesgue (MPSI)

Soient deux réels a et b avec $a < b$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrer qu'on a encore $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$.

3. En déduire que ce résultat reste vrai pour une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

1. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ on peut intégrer par parties en dérivant f ; un facteur $1/n$ apparaîtra dans une primitive de $\sin(nt)$ ce qui permettra de montrer que la limite est bien nulle.

L'intégration par parties est bien un argument spécifique aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: ce calcul sera impossible dans les questions suivantes car la fonction f n'y sera même plus nécessairement continue.

En intégrant par parties on a, pour $n \neq 0$:

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

D'une part, le crochet vaut $\frac{1}{n}(f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb))$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part, on peut majorer la dernière intégrale en introduisant le réel

$$M = \max\{|f'(t)| : t \in [a,b]\}$$

(qui existe car f' est continue sur le segment $[a,b]$) :

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)}{n}$$

donc cette intégrale tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$.

2. f étant en escalier sur $[a,b]$ il existe un entier naturel non nul p, une subdivision $a = c_0 < \cdots < c_p = b$ de $[a,b]$ et p nombres réels (pas forcément distincts) $\lambda_0,\ldots,\lambda_{p-1}$ tels que, pour tout $k \in \{0,\ldots,p-1\}$, et pour tout $x \in]c_k,c_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$.

Attention au choix des notations! La lettre n étant déjà prise par l'énoncé il faut en choisir une nouvelle pour numéroter les éléments de la subdivision.

Sur chacun des intervalles $]c_k,c_{k+1}[$ le calcul est simple puisque f y est constante ; nous allons donc découper le segment $[a,b]$ aux points c_k à l'aide de la relation de Chasles.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

Or, à k fixé et pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque :

$$\begin{aligned}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t &= \int_{c_k}^{c_{k+1}} \lambda_k \sin(nt)\mathrm{d}t\\ &= \left[-\lambda_k \frac{\cos(nt)}{n}\right]_{c_k}^{c_{k+1}}\\ &= \frac{\lambda_k}{n}(\cos(n\,c_{k+1}) - \cos(n\,c_k)).\end{aligned}$$

Comme la fonction cosinus est bornée en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$ on a donc :

$$\left|\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2|\lambda_k|}{n}.$$

On conclut avec la relation de Chasles donnée plus haut :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{p-1}\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\left|\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{2}{n}(|\lambda_0| + \cdots + |\lambda_{p-1}|).\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0.$

3. Commençons par raisonner qualitativement.

On sait que, si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, $\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ est proche de 0 pour n assez grand. De plus, f étant continue par morceaux, on sait qu'on peut l'approcher aussi près que l'on veut par une fonction en escalier φ et donc que les intégrales de f et de φ seront proches ; ainsi, pour n assez grand, $\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ est proche de 0.

Ainsi, on commencera par approcher f par une fonction en escalier φ puis on considérera des entiers assez grands pour que $\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ soit proche de 0.

Il reste maintenant à formaliser ceci en utilisant rigoureusement le théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier.

Soit un réel $h > 0$.

f étant continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que : $\forall x \in [a,b], |f(x) - \varphi(x)| \leqslant h$.

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$; il existe donc un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant h$.

On a donc, pour $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\sin(nt)\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\sin(nt)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)-\varphi(t)||\sin(nt)|\mathrm{d}t + h \\
&\leqslant (b-a+1)h.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant un réel $\varepsilon > 0$. Posons $h = \varepsilon/(b-a+1)$. Soit φ la fonction en escalier et N l'entier naturel ci-dessus correspondant à ce choix de h.

On a alors, pour tout entier $n \geqslant N$: $\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$.

Ceci signifie exactement, par définition de la limite d'une suite, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0.$$

On voit que, pour arriver à « $\leqslant \varepsilon$ » à la fin, il a fallu écrire le théorème d'approximation avec h. Ceci est courant et, pour trouver la bonne forme de h à poser, il est généralement utile de commencer avec h puis, *a posteriori*, de choisir h en fonction de ε pour obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

Exercice 8.9 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de sa dérivée sans symbole intégral (ne pas chercher une primitive explicite de la fonction intégrée).

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (on pourra intégrer par parties avant de majorer l'intégrale).

3. Montrer que f possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand x tend vers 0 de

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t.$$

1. La fonction intégrée ne possède pas de primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles ; les changements de variable ou intégrations par parties que l'on pourrait être tenté d'essayer ne simplifient pas l'expression.

Cependant, nous savons calculer les dérivées d'expressions de ce type ; plus précisément, la dérivée d'une application de la forme $x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, avec a fixé et g continue, est tout simplement la fonction g (ce résultat est parfois appelé *théorème fondamental de l'analyse*). Ici, x apparaît dans les deux bornes, ce qui n'est pas contraignant car on peut utiliser la relation de Chasles :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Formulé autrement : si on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ (qui est, d'après le cours, la primitive nulle en 1 de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$), on a $f(x) = F(2x) - F(x)$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et possède donc une primitive F.

Par ailleurs, $f(x) = F(2x) - F(x)$ donc, F étant dérivable, f l'est également. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 2\,F'(2x) - F'(x)$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2\,\frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x} = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x}$$

ou encore, en utilisant la relation $\cos(2x) - \cos(x) = -2\sin(x/2)\sin(3x/2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -2\,\frac{\sin(x/2)\sin(3x/2)}{x}$$

L'utilisation de la formule de trigonométrie pour factoriser la dernière expression n'est pas absolument nécessaire au regard de la question posée. Ceci dit, il est utile de savoir factoriser ce genre d'expression pour pouvoir, si nécessaire, déterminer aisément le signe et les points d'annulation de la fonction.

2. Une majoration directe ne permet pas de conclure. En effet, la seule majoration simple possible du cosinus sur $\mathbb{R}$ est la constante 1. On obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(2)$$

qui ne permet pas de conclure.

L'idée de l'intégration par partie est de faire apparaître $1/t^2$ dans l'intégrale, ce qui fournira un terme en $1/x$ dans la majoration.

Nous allons donc « dériver $1/t$ et primitiver $\cos(t)$ ».

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Les deux premiers termes tendent clairement vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Reste à traiter l'intégrale : cette fois, la majoration fournira un résultat intéressant.

Une majoration grossière donne

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}.$$

Ainsi, l'expression de $f(x)$ trouvée plus haut est la somme de trois termes tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$: on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Le problème de la définition de f est que la fonction intégrée diverge en 0. Dans l'intégrale qu'il est ici suggéré d'étudier, on peut effectuer une majoration simple, encore une fois grâce à une formule de trigonométrie.

Comme $\cos(t) - 1 = -2\sin^2(t/2)$ pour tout réel t on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t = -\int_x^{2x} \frac{2\sin^2(t/2)}{t}\mathrm{d}t.$$

En utilisant l'inégalité $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$, vraie pour tout réel $|\theta|$, il vient successivement, pour tout réel $x > 0$:

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \left|\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\right| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2/2}{t}\mathrm{d}t = \frac{3x^2}{4}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t\right) = 0$.

Par ailleurs :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(2).$$

En conclusion :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ln(2).$$

Exercice 8.10 : Intégrales doubles : rectangle et triangle

1. Soit R le rectangle $[0,2] \times [0,1]$. Calculer

$$I = \iint_R (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Calculer

$$J = \iint_T x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. Il s'agit d'une intégrale sur un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes : autrement dit, le domaine d'intégration est l'ensemble des couples (x,y) avec $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Dans cette situation, c'est-à-dire quand les deux variables varient entre des bornes fixes, nous avons le choix de l'ordre d'intégration : c'est le théorème de Fubini.

On a

$$\iint_R (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Calculons l'intégrale intérieure : on considère y comme une constante. Il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+y)^2 \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}((y+2)^3 - y^3) \\ &= \frac{1}{3}(6y^2 + 12y + 8)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{3}(6y^2 + 12y + 8)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\left[2y^3 + 6y^2 + 8y\right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on aurait pu intégrer d'abord par rapport à y puis par rapport à x. Cela aurait donné les calculs suivants :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+y)^2 \mathrm{d}y &= \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}((x+1)^3 - x^3) \\ &= \frac{1}{3}(3x^2+3x+1)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2 \frac{1}{3}(3x^2+3x+1)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

2. Cherchons une description de T à l'aide d'encadrements de x et y.

On peut voir T comme l'ensemble des couples (x, y) avec $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$. Dans ce cas, $J = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

> Nous n'avons plus le choix de l'ordre d'intégration : la dernière intégrale (celle qui se trouve à l'extérieur) doit avoir des bornes fixes pour avoir un sens !

Si l'on préfère décrire T comme l'ensemble des couples (x, y) avec $0 \leqslant x \leqslant 1 - y$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$, il faut intégrer dans l'autre sens : $J = \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

D'après le cours, les deux calculs donnent bien le même résultat.

Les éléments de T sont décrits par les encadrements :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \end{cases}$$

On a donc :

$$J = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Intégrale intérieure : x est constant et

$$\begin{aligned}\int_0^{1-x} x^2 y \mathrm{d}y &= \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \\ &= \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + x^2).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Si l'on avait plutôt écrit

$$J = \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

on aurait fait des calculs analogues, en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y ; le résultat obtenu est le même.

Plus précisément :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-y} x^2 y \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_0^{1-y} \\ &= \frac{1}{3}((1-y)^3 y) \\ &= \frac{1}{3}(-y^4 + 3y^3 - 3y^2 + y) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{3}(-y^4 + 3y^3 - 3y^2 + y)\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{3}{4}y^4 + y^3 - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Exercice 8.11 : Intégrale double en polaires

Dans $\mathbb{R}^2$ on désigne par D_a le disque de centre (0,0) et de rayon $a > 0$. Calculer

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Il n'y a aucune hésitation à avoir : le domaine d'intégration est un disque donc le changement de variable polaire s'impose !

• Tout d'abord, changeons les variables dans la fonction à intégrer :

Notons (r,θ) les coordonnées polaires d'un point de coordonnées cartésiennes (x, y). Alors :

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$$

et donc : $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$.

• D'après le cours, l'élément différentiel polaire est $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

• Enfin, il faut déterminer le nouveau domaine d'intégration.

Autrement dit, nous devons décrire le disque D_a par des encadrements portant sur r et θ, de sorte qu'aucun point du disque n'apparaisse plusieurs fois dans cette description, ou au pire que l'ensemble des points qui apparaissent plusieurs fois soit d'aire nulle.

En l'occurence, on peut décrire les points de D_a par

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Les points qui sont décrits plusieurs fois sont l'origine ($r = 0$, θ quelconque) et les points du segment $[0,1] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$, pour lesquels r est donné mais θ peut valoir 0 ou 2π.

Les points de D_a décrits de plusieurs manières forment donc un ensemble d'aire nulle : nous pouvons donc prendre 0 et a comme bornes d'intégration sur la variable r et 0 et 2π comme bornes pour θ.

• On peut enfin écrire la formule de changement de variable polaire :

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Calculons l'intégrale intérieure :

$$\int_0^a e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.$$

Et enfin, le résultat ne dépendant pas de θ, l'intégrale extérieure est immédiate :

$$I_a = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}\right)\mathrm{d}\theta = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

9

Courbes paramétrées

L'étude des courbes paramétrées s'effectue toujours en suivant les mêmes étapes.

- Dans un premier temps, on détermine l'intervalle d'étude. Celui-ci dépend du lieu de définition des fonctions qui entrent en jeu. Souvent, des considérations de symétrie permettent de restreindre l'intervalle d'étude et de minimiser ainsi le nombre de calculs.
- Dans un deuxième temps, on étudie la courbe sur l'intervalle déterminé précédemment par des moyens appropriés. Il est également utile de chercher à comprendre ce qui se passe aux bornes de l'intervalle et d'y calculer les éventuelles tangentes, asymptotes, etc.
- Dans un troisième temps, enfin, on trace la courbe, à l'aide des informations recueillies.

COURBES PARAMÉTRÉES DÉFINIES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.1 : Cycloïde

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\begin{cases} x(t) &= t - \sin(t) \\ y(t) &= 1 - \cos(t) \end{cases}$$

Intervalle d'étude

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, nous pouvons nous restreindre, pour leur étude, à un intervalle plus petit, à l'aide des symétries.

Remarquons que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x(t+2\pi) = 2\pi + x(t) \quad \text{et} \quad y(t+2\pi) = y(t).$$

Cela signifie que l'on passe du point de coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ au point de coordonnées cartésiennes $(x(t+2\pi), y(t+2\pi))$ en effectuant une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. Par conséquent, il nous suffit d'étudier les fonctions x et y sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[0,2\pi]$ ou $[-\pi,\pi]$.

Remarquons encore que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t).$$

Cela signifie que l'on passe du point de coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ au point de coordonnées cartésiennes $(x(-t), y(-t))$ en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Une étude des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi]$ nous permettra donc de les connaître sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$, d'après le point précédent.

Étude sur l'intervalle $[0,\pi]$

Dressons le tableau de variation des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi]$. Calculons, tout d'abord, leur dérivée :

$$\begin{cases} x'(t) &= 1-\cos(t) \\ y'(t) &= \sin(t) \end{cases}.$$

On en déduit aussitôt que, quel que soit $t \in [0,\pi]$, on a $x'(t) \geqslant 0$ et $y'(t) \geqslant 0$.

Le tableau de variation prend la forme suivante :

t	0		π
x'	0	$+$	2
y'	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	π
y	0	$\nearrow$	2

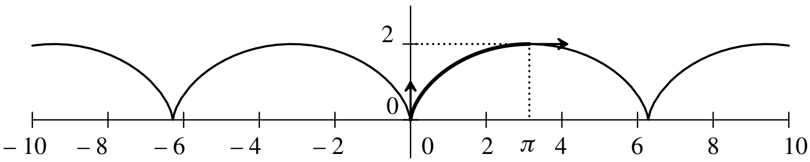
Calculons également les coordonnées des points situés aux extrémités de l'intervalle d'étude, ainsi que la direction des tangentes en ces points.

Le point correspondant à $t = 0$ a pour coordonnées cartésiennes $(0,0)$. Le vecteur $(x'(0), y'(0)) = (0,0)$ ne nous donne pas d'information sur la tangente à la courbe en ce point. Aussi devons-nous calculer des dérivées supplémentaires. Le vecteur de coordonnées $(x''(0), y''(0)) = (0,1) = \vec{j}$ n'étant pas nul, il dirige la tangente à la courbe.

Le point correspondant à $t = \pi$ a pour coordonnées cartésiennes $(\pi,2)$. Le vecteur $(x'(\pi), y'(\pi)) = (2,0) = 2\vec{i}$ n'étant pas nul, il dirige la tangente à la courbe.

Tracé de la courbe

Nous traçons tout d'abord la portion de la courbe correspondant à $t \in [0,\pi]$. Cette partie est tracée en gras. Le reste de la courbe est obtenu par les arguments de symétrie décrits lors de la détermination de l'intervalle d'étude



Exercice 9.2 : Astroïde

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\begin{cases} x(t) &= 4\cos^3(t) \\ y(t) &= 4\sin^3(t) \end{cases}$$

Intervalle d'étude

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, nous pouvons nous restreindre, pour leur étude, à un intervalle plus petit, à l'aide des symétries.

Remarquons que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x(t + 2\pi) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t + 2\pi) = y(t).$$

Par conséquent, il nous suffit d'étudier les fonctions x et y sur un intervalle de longueur 2π.

Remarquons encore que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x(t+\pi) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(t+\pi) = -y(t).$$

Cela signifie que l'on passe du point de coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ au point de coordonnées cartésiennes $(x(t+\pi), y(t+\pi))$ en effectuant une symétrie par rapport à l'origine O. Cette remarque nous permet de restreindre l'étude à un intervalle de longueur π.

Remarquons également que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -y(t) \quad \text{et} \quad y\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = x(t).$$

Cela signifie que l'on passe du point de coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ au point de coordonnées cartésiennes $(x(t+\pi/2), y(t+\pi/2))$ en effectuant une rotation d'angle $\pi/2$. Cette remarque nous permet de restreindre l'étude à un intervalle de longueur $\pi/2$.

Remarquons finalement que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x(-t) = x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = -y(t).$$

Cela signifie que l'on passe du point de coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ au point de coordonnées cartésiennes $(x(-t), y(-t))$ en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Une étude des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi/4]$ nous permettra donc de les connaître sur l'intervalle $[-\pi/4,\pi/4]$, ce qui nous suffit pour tracer entièrement la courbe, d'après le point précédent.

Étude sur l'intervalle $[0,\pi/4]$

Dressons le tableau de variation des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi/4]$. Calculons, tout d'abord, leur dérivée :

$$\begin{cases} x'(t) &= -12\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) &= 12\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}.$$

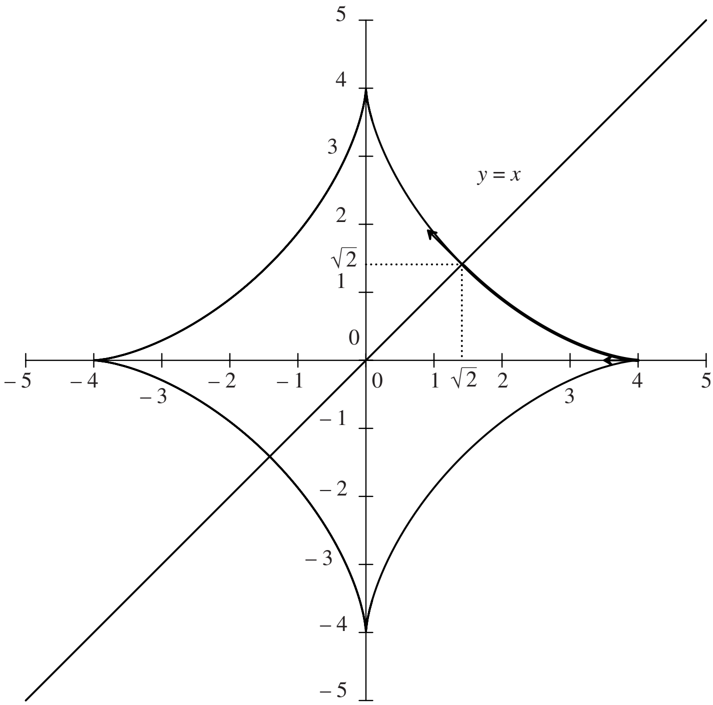
Le tableau de variation prend la forme suivante :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x'	0	$-$	$-3\sqrt{2}$
y'	12	$+$	$3\sqrt{2}$
x	4	$\searrow$	$\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Étudions, à présent, les tangentes à la courbe aux points correspondant aux extrémités de l'intervalle. Lorsque $t = \pi/4$, la tangente est dirigée par le vecteur $(x'(\pi/4), y'(\pi/4)) = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, qui est colinéaire au vecteur $(-1,1) = -\vec{i} + \vec{j}$. Lorque $t = 0$, le vecteur $(x'(0), y'(0))$ est nul et ne donne pas d'information sur la tangente. Le vecteur $(x''(0), y''(0)) = (-12,0) = -12\vec{i}$ n'est pas nul et dirige donc la tangente. On en déduit que la tangente est horizontale en ce point.

Tracé de la courbe

Nous traçons tout d'abord la portion de la courbe correspondant à $t \in [0,\pi/4]$. Cette partie est tracée en gras. Le reste de la courbe est obtenu par les arguments de symétrie décrits lors de la détermination de l'intervalle d'étude.



Exercice 9.3 : Courbe rationnelle

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$$

Intervalle d'étude

La fonction x est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ et la fonction y est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ces fonctions ne présentent pas de symétrie visible. Aussi les étudierons-nous simplement sur leurs intervalles de définition.

Étude des fonctions

Dressons le tableau de variation des fonctions x et y. Calculons, tout d'abord, leur dérivée, là où elle est définie :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}, & x'(t) &= \dfrac{t^2(t^2+2t-6)}{(t-1)^2(t+2)^2} \\ \mathbb{R}\setminus\{1\}, & y'(t) &= \dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$$

Le polynôme X^2+2X-6 possède deux racines : $-1-\sqrt{7}$ et $-1+\sqrt{7}$. En revanche, le discriminant du polynôme X^2-2X+2 est strictement négatif et ce polynôme ne prend donc que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons, à présent, dresser le tableau de variation :

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{7}$		-2		1		$-1+\sqrt{7}$		$+\infty$
x'		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y'		$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
x	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗		↗	$-\frac{8}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Nous avons noté $\alpha = x(-1-\sqrt{7}) \simeq -6{,}34$ et $\beta = x(-1+\sqrt{7}) \simeq 1{,}89$.

Étude des branches à l'infini

Avant de tracer la courbe, il nous reste à étudier les branches à l'infini.

L'étude au voisinage de $t = -2$ est particulièrement simple. En effet, la fonction y admet une limite finie en $t = -2$, alors que la fonction x tend vers l'infini. On en déduit aussitôt que la courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = -8/3$.

Pour étudier le comportement au voisinage des autres valeurs de t, nous aurons besoin d'étudier la fonction y/x. Calculons-la dès à présent :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0,1\},\ \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(t-2)(t+2)}{t^2} = \frac{t^2-4}{t^2}.$$

Plaçons-nous, à présent, au voisinage de $-\infty$. On a

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1.$$

Par conséquent, la courbe possède une direction asymptotique d'équation $y = x$. Calculons-la plus précisément :

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{-4t}{(t-1)(t+2)} = 0.$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers $-\infty$. Un calcul similaire nous montre que cette droite est encore asymptote lorsque t tend vers $+\infty$.

Plaçons-nous, à présent, au voisinage de $t = 1$. On a

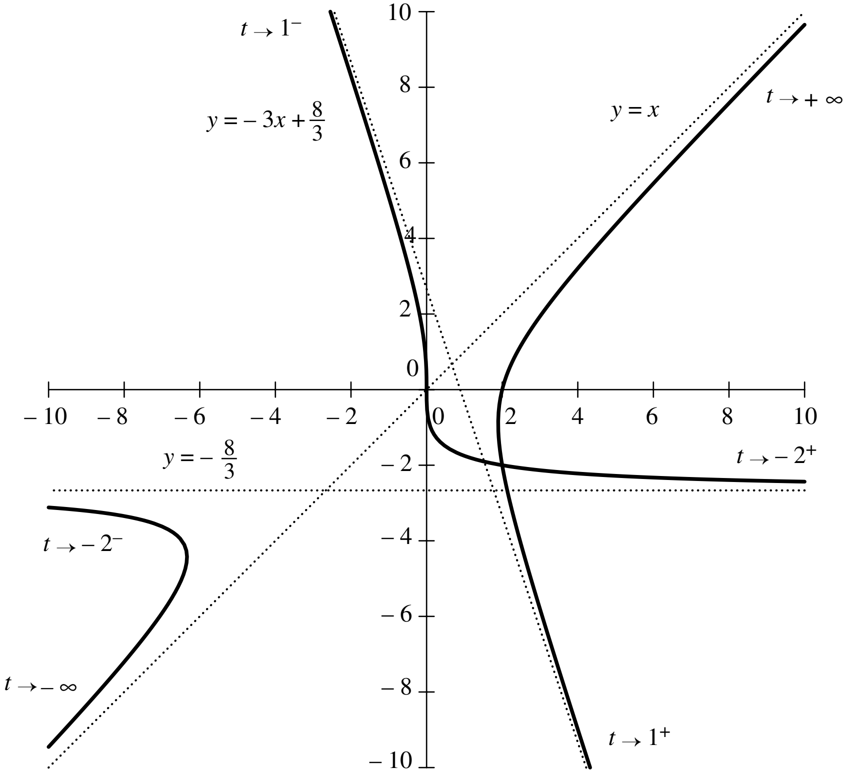
$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = -3.$$

Par conséquent, la courbe possède direction asymptotique d'équation $y = -3x$. Calculons-la plus précisément :

$$\lim_{t\to 1} y(t) + 3x(t) = \lim_{t\to 1} \frac{4t^3-4t}{(t-1)(t+2)} = \lim_{t\to 1} \frac{4t(t+1)}{t+2} = \frac{8}{3}.$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = -3x + 8/3$ est asymptote à la courbe lorsque t tend vers 1.

Tracé de la courbe



COURBES PARAMÉTRÉES DÉFINIES EN COORDONNÉES POLAIRES

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe à des courbes paramétrées définies en coordonnées polaires.

Quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}.$$

Exercice 9.4 : Cardioïde

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta)).$$

Intervalle d'étude

La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, nous pouvons nous restreindre, pour son étude, à un intervalle plus petit, à l'aide des symétries.

Remarquons que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta).$$

Par conséquent, il nous suffit d'étudier la fonction ρ sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[0,2\pi]$ ou $[-\pi,\pi]$.

Remarquons encore que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\rho(-\theta) = \rho(\theta).$$

Cela signifie exactement que pour passer du point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$ au point de coordonnées polaires $(\rho(-\theta),-\theta)$, on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Une étude de la fonction ρ sur l'intervalle $[0,\pi]$ nous permettra donc de la connaître sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$, d'après le point précédent.

Étude sur l'intervalle $[0,\pi]$

Pour tracer la courbe, il nous suffit de connaître le signe de la fonction ρ ainsi que les points correspondant aux extrémités de l'intervalle d'étude et les directions des tangentes en ces points. En particulier, il n'est pas utile de dresser le tableau de variations de la fonction ρ.

Quel que soit $\theta \in [0,\pi]$, on a

$$\rho(\theta) = 2(1 + \cos(\theta)) \geqslant 0.$$

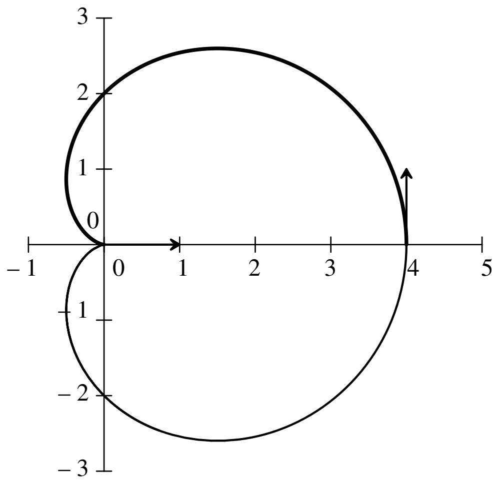
Étudions, à présent, le point correspondant à $\theta = 0$. Ce point s'écrit $(4,0)$ en coordonnées polaires et donc $(4,0)$ en coordonnées cartésiennes. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur

$$\rho'(0)\vec{u}_0 + \rho(0)\vec{v}_0 = 4\vec{v}_0.$$

Étudions, à présent, le point correspondant à $\theta = \pi$. Ce point s'écrit $(0,\pi)$ en coordonnées polaires et donc $(0,0)$ en coordonnées cartésiennes. Puisque $\rho(\pi)$ est nul, nous savons que la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u}_\pi$.

Tracé de la courbe

Nous traçons tout d'abord la portion de la courbe correspondant à $t \in [0,\pi]$. Cette partie est tracée en gras. Le reste de la courbe est obtenu par les arguments de symétrie décrits lors de la détermination de l'intervalle d'étude.



Exercice 9.5 : Rosace

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$\rho(\theta) = \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right).$$

On apportera un soin particulier à l'étude des symétries de cette courbe.

Intervalle d'étude

La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, nous pouvons nous restreindre, pour son étude, à un intervalle plus petit, à l'aide des symétries.

• Remarquons que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\rho\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\theta}{2} + 2\pi\right) = \rho(\theta).$$

Cela signifie exactement que pour passer du point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$ au point de coordonnées polaires $(\rho(\theta + 4\pi/3),\theta + 4\pi/3)$, on effectue une rotation d'angle $4\pi/3$. Par conséquent, il nous suffit d'étudier la fonction ρ sur un intervalle de longueur $4\pi/3$.

> Contrairement aux exemples précédents, il ne suffira pas ici de tracer la partie de la courbe correspondant à une variation de θ de $4\pi/3$. En effet, les points correspondant à θ et $\theta + 4\pi/3$ sont différents, même si $\rho(\theta) = \rho(\theta + 4\pi/3)$. Pour que les points correspondant à θ et $\theta + \alpha$ soient identiques, il suffit que α soit multiple de $4\pi/3$, pour que ρ ne change pas, et multiple de 2π, pour que θ ne change pas. Le plus petit α convenable est $\alpha = 4\pi$. Par conséquent, une fois qu'on a tracé la courbe sur un intervalle de longueur $4\pi/3$, il faut encore effectuer deux rotations d'angle $4\pi/3$ pour obtenir la courbe complète.

• Remarquons encore que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\rho\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \pi\right) = -\rho(\theta).$$

Cela signifie que pour passer du point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$ au point de coordonnées polaires $(\rho(\theta + 2\pi/3),\theta + 2\pi/3)$, on effectue une rotation d'angle $2\pi/3$, puis une symétrie centrale, autrement dit, une rotation d'angle $-\pi/3$. Ce point, joint au précédent, montre qu'il nous suffit d'étudier la fonction ρ sur un intervalle de longueur $2\pi/3$.

• Remarquons finalement que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\rho(-\theta) = -\rho(\theta).$$

On passe donc du point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$ au point de coordonnées polaires $(\rho(-\theta),-\theta)$ en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Cela nous permet de restreindre encore l'intervalle d'étude à $[0,\pi/3]$.

Résumons, à présent, la stratégie. Nous commençons par étudier la fonction ρ sur l'intervalle $[0,\pi/3]$. On en déduit son comportement sur $[-\pi/3,\pi/3]$, grâce au dernier point, puis sur $[-\pi/3,\pi]$, grâce au deuxième point et donc sur $\mathbb{R}$, grâce au premier point.

Étude sur l'intervalle $[0,\pi/3]$

Quel que soit $\theta \in [0,\pi/3]$, on a $3\theta/2 \in [0,\pi/2]$ et donc

$$\rho(\theta) = \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \geqslant 0.$$

Étudions, à présent, le point correspondant à $\theta = 0$. Ce point s'écrit (0,0) en coordonnées polaires et donc (0,0) en coordonnées cartésiennes. Puisque $\rho(0)$ est nul, nous savons que la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u}_0$.

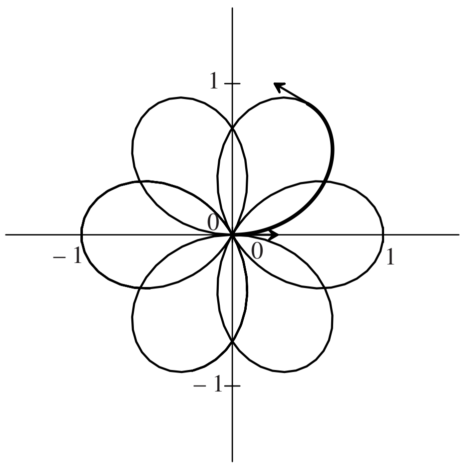
Étudions, à présent, le point correspondant à $\theta = \pi/3$. Ce point s'écrit $(1,\pi/3)$ en

coordonnées polaires et donc $(1/2,\sqrt{3}/2)$ en coordonnées cartésiennes. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur

$$\rho'\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{u}_{\frac{\pi}{3}} + \rho\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{v}_{\frac{\pi}{3}} = \vec{v}_{\frac{\pi}{3}}.$$

Tracé de la courbe

Nous traçons tout d'abord la portion de la courbe correspondant à $t \in [0,\pi/3]$. Cette partie est tracée en gras. Le reste de la courbe est obtenu par les arguments de symétrie décrits lors de la détermination de l'intervalle d'étude.



Exercice 9.6 : Branche infinie polaire

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$\rho(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Intervalle d'étude

La fonction ρ est définie sur

$$I = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cependant, nous pouvons nous restreindre, pour son étude, à un intervalle plus petit, à l'aide des symétries.

• Remarquons que, quel que soit $\theta \in I$, on a

$$\rho\,(\theta + 2\pi) = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = \rho(\theta).$$

Par conséquent, il nous suffit d'étudier la fonction ρ sur un intervalle de longueur 2π.

• Remarquons encore que, quel que soit $\theta \in I$, on a

$$\rho(-\theta) = -\rho(\theta).$$

On passe donc du point de coordonnées polaires $(\rho(\theta),\theta)$ au point de coordonnées polaires $(\rho(-\theta),-\theta)$ en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Cela nous permet de restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi[$.

Étude sur l'intervalle $[0,\pi[$

Quel que soit $\theta \in [0,\pi[$, on a $\theta/2 \in [0,\pi/2[$:

$$\rho(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0.$$

• Étudions, à présent, le point correspondant à $\theta = 0$. Ce point s'écrit $(0,0)$ en coordonnées polaires et donc $(0,0)$ en coordonnées cartésiennes. Puisque $\rho(0)$ est nul, nous savons que la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u}_0$.

• Remarquons que la limite de $\rho(\theta)$ lorsque θ tend vers π par valeurs inférieures est égale à $+\infty$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}$ possède une direction asymptotique horizontale dans le repère $(0,\vec{u}_\pi,\vec{v}_\pi)$.

Notons Δ la droite passant par l'origine du repère et dirigée par le vecteur $\vec{u}_\pi$. C'est la droite d'équation $y = 0$. L'asymptote éventuelle est la droite $\Delta + k\,\vec{v}_\pi$ où

$$k = \lim_{\theta \to \pi^-} \rho(\theta)\sin(\theta - \pi).$$

Quel que soit $\theta \in [0,\pi[$, on a

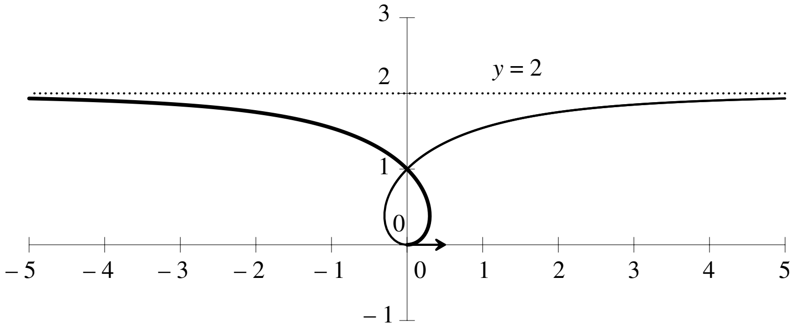
$$\rho(\theta)\sin(\theta - \pi) = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) = -2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Par conséquent, $k = -2$. On en déduit que l'asymptote est la droite d'équation $y = 2$.

Il faut prendre garde à bien décaler la droite asymptote de k unités **dans le sens du vecteur** $\vec{v}_\pi$. Dans notre cas, ce vecteur est dirigé vers le bas. Par conséquent, nous devons déplacer la droite de 2 unités **vers le bas** dans le repère $(O, \vec{u}_\pi, \vec{v}_\pi)$, ce qui revient à dire de 2 unités **vers le haut** dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracé de la courbe

Nous traçons tout d'abord la portion de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi[$. Cette partie est tracée en gras. Le reste de la courbe est obtenu par les arguments de symétrie décrits lors de la détermination de l'intervalle d'étude.



Partie 3
Algèbre

Plan

Plan

Algèbre générale

10

Exercice 10.1 : Différence symétrique

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Si F et G sont deux parties de E, on définit leur différence symétrique par

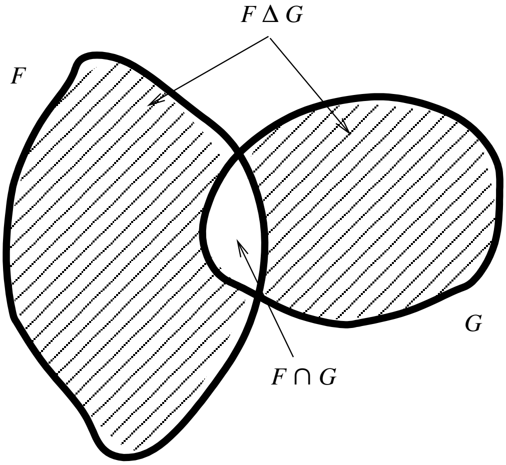
$$F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F).$$

1. Soient $F, G \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'on a

$$F \setminus G = F \cap G^c.$$

2. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

Avant de commencer, il est bon de faire un dessin pour se représenter la situation. Cette remarque vaut, de manière générale, pour les exercices qui concernent les ensembles. Si F et G sont deux sous-ensembles de E, rappelons que $F \setminus G$ désigne l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent par à G. Par conséquent, les éléments de la différence symétrique $F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F)$ sont les éléments de E qui appartiennent à F mais pas à G ou à G mais pas à F, autrement dit, ce sont les éléments qui appartiennent à un et un seul des deux ensembles F et G.



1. Nous voulons montrer l'égalité de deux ensembles. Dans ce cas de figure, on raisonne généralement par double inclusion.

• Montrons, tout d'abord, que $F \setminus G \subset F \cap G^c$. Soit $x \in F \setminus G$. Par définition, cela signifie que $x \in F$ et $x \notin G$. Cette dernière condition signifie exactement que $x \in G^c$. Par conséquent, nous avons $x \in F$ et $x \in G^c$, autrement dit, $x \in F \cap G^c$.
• Réciproquement, montrons que $F \cap G^c \subset F \setminus G$. Soit $x \in F \cap G^c$. Par définition, on a $x \in F$ et $x \in G^c$, autrement dit $x \notin G$. Nous avons donc $x \in F \setminus G$.
Finalement, nous avons bien $F \setminus G = F \cap G^c$.

2. Nous devons montrer qu'un certain ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe commutatif. Ici, nous n'avons pas d'autre choix que de vérifier, un à un, les axiomes définissant un groupe commutatif. Rappelons qu'un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un groupe si

– la loi $*$ est associative, c'est-à-dire

$$\forall (g,h,i) \in G^3, (g * h) * i = g * (h * i) \ ;$$

– l'ensemble G possède un élément neutre, c'est-à-dire un élément e qui vérifie

$$\forall g \in G, g * e = e * g = g \ ;$$

– tout élément de G est inversible, c'est-à-dire

$$\forall g \in G, \exists h \in G, h * g = g * h = e.$$

Si, de plus, la loi $*$ est commutative, c'est-à-dire

$$\forall (g,h) \in G^2, g * h = h * g,$$

on dit que le groupe $(G,*)$ est commutatif.
L'une de ces propriétés est ici évidente : il s'agit de la commutativité de la loi, qui découle directement de sa définition.

Commutativité

Remarquons, tout d'abord, que la loi Δ est commutative. En effet, quels que soient $F,G \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$\begin{aligned} F\Delta G &= (F \setminus G) \cup (G \setminus F) \\ &= (G \setminus F) \cup (F \setminus G) \\ &= G\Delta F. \end{aligned}$$

Associativité

Montrons, à présent, l'associativité de la loi Δ. Nous devons donc montrer que, quels que soient $F,G,H \in \mathcal{P}(E)$, on a $F\Delta(G\Delta H) = (F\Delta G)\Delta H$. L'opération $\setminus$ est difficile à manipuler. Il vaut donc mieux essayer de se ramener aux opérations plus classiques : $\cap$, $\cup$ et $.^c$. C'est d'ailleurs ce que nous suggère la première question. Pour ces opérations, nous connaissons plusieurs formules qui pourront nous aider :

- $\forall F,G,H \in \mathcal{P}(E),\ F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$;
- $\forall F,G,H \in \mathcal{P}(E),\ F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$;
- $\forall F,G \in \mathcal{P}(E),\ (F \cap G)^c = F^c \cup G^c$;
- $\forall F,G \in \mathcal{P}(E),\ (F \cup G)^c = F^c \cap G^c$;
- $\forall F \in \mathcal{P}(E),\ (F^c)^c = F$.

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à utiliser ces formules pour démontrer l'associativité de la loi Δ. Les formules que nous obtiendrons seront assez lourdes et il faudra donc procéder par étapes, avec beaucoup de précautions.

Soient $F,G,H \in \mathcal{P}(E)$. Calculons $F\Delta(G\Delta H)$. Nous avons

$$\begin{aligned} F\Delta(G\Delta H) &= (F \setminus (G\Delta H)) \cup ((G\Delta H) \setminus F) \\ &= (F \cap (G\Delta H)^c) \cup ((G\Delta H) \cap F^c), \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Commençons par calculer $(G\Delta H)^c$:

$$\begin{aligned}(G\Delta H)^c &= ((G \setminus H) \cup (H \setminus G))^c \\ &= ((G \cap H^c) \cup (H \cap G^c))^c \\ &= ((G \cup H) \cap (G \cup G^c) \cap (H^c \cup H) \cap (H^c \cup G^c))^c \\ &= (G \cup H)^c \cup (G \cup G^c)^c \cup (H^c \cup H)^c \cup (H^c \cup G^c)^c \\ &= (G^c \cap H^c) \cup (G^c \cap G) \cup (H \cap H^c) \cup (H \cap G) \\ &= (G^c \cap H^c) \cup (G \cap H),\end{aligned}$$

car $G^c \cap G = \emptyset$ et $H \cap H^c = \emptyset$. On en déduit que

$$\begin{aligned}F \cap (G\Delta H)^c &= F \cap ((G^c \cap H^c) \cup (G \cap H)) \\ &= (F \cap G^c \cap H^c) \cup (F \cap G \cap H).\end{aligned}$$

Calculons, à présent, $(G\Delta H) \cap F^c$:

$$\begin{aligned}(G\Delta H) \cap F^c &= ((G \cap H^c) \cup (H \cap G^c)) \cap F^c \\ &= (G \cap H^c \cap F^c) \cup (H \cap G^c \cap F^c).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}F\Delta(G\Delta H) &= (F \cap G^c \cap H^c) \cup (F \cap G \cap H) \\ &\quad \cup (F^c \cap G \cap H^c) \cup (F^c \cap G^c \cap H).\end{aligned}$$

Calculons, à présent, $(F\Delta G)\Delta H$. Puisque Δ est commutative, on a

$$\begin{aligned}(F\Delta G)\Delta H &= H\Delta(F\Delta G) \\ &= (H \cap F^c \cap G^c) \cup (H \cap F \cap G) \\ &\quad \cup (H^c \cap F \cap G^c) \cup (H^c \cap F^c \cap G) \\ &= F\Delta(G\Delta H).\end{aligned}$$

Par conséquent, la loi Δ est associative.

Élément neutre

Cherchons, à présent, l'élément neutre e pour la loi Δ. Réfléchissons en considérant notre dessin précédent. Quel que soit $F \in \mathcal{P}(E)$, nous devons avoir $F\Delta e = F$. Si l'ensemble e coupe F, alors, en construisant $F\Delta e$, on ôte une partie de F. Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir $F\Delta e = F$ dans ce cas.

Si l'ensemble e est disjoint de F, alors on voit facilement que l'on a $F\Delta e = F \cup e$. Pour que $F \cup e = F$, avec e disjoint de F, la seule solution est que e soit vide. Nous allons vérifier que l'ensemble vide est bien l'élément neutre recherché.

Montrons que l'ensemble vide est un élément neutre pour la loi Δ. En effet, quel que soit $F \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$F\Delta\emptyset = (F \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus F) = F \cup \emptyset = F.$$

Puisque la loi Δ est commutative, nous avons également $\emptyset\Delta F = F$.

Inverse

Il nous reste, à présent, à montrer que tout élément possède un inverse. Autrement dit, pour tout sous-ensemble F de E, nous devons trouver un ensemble G qui vérifie $F\Delta G = \emptyset$. Regardons de nouveau le dessin. Si l'ensemble G contient un point qui n'appartient pas à F, alors ce point appartient à $F\Delta G$. De même, si un point de F n'appartient pas à G, alors ce point appartient à $F\Delta G$. Par conséquent, le seul candidat possible est $G = F$.

Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. On a

$$F\Delta F = (F \setminus F) \cup (F \setminus F) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Par conséquent, l'élément F possède un inverse qui est F.
Finalement, nous avons montré que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

Exercice 10.2 : Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

1. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$ la partie

$$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2. Soit G un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'ensemble $E = \{m \in G, m > 0\}$ n'est pas vide et que sa borne inférieure n appartient à E.

b. Montrer que l'on a l'inclusion

$$n\mathbb{Z} \subset G.$$

c. Montrer que l'on a l'égalité

$$n\mathbb{Z} = G.$$

1. Cette première question est une simple question de vérification. Nous la rédigeons sans plus attendre.

Nous avons

$$0 = n0 \in n\mathbb{Z}.$$

Soient $u,v \in n\mathbb{Z}$. Par définition, il existe $k,l \in \mathbb{Z}$ tels que $u = nk$ et $v = nl$. Nous avons alors

$$u + v = nk + nl = n(k + l) \in n\mathbb{Z}.$$

Soit $u \in \mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = nk$. Alors

$$-u = -nk = n(-k) \in n\mathbb{Z}.$$

Finalement, nous avons montré que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2. Soit G un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$. L'énoncé nous propose de montrer qu'il est nécessairement de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, il est logique de chercher à déterminer d'abord un n candidat et de vérifier, dans un second temps, que l'on a bien $G = n\mathbb{Z}$. Comment trouver l'entier n ? Il se repère facilement dans le groupe $n\mathbb{Z}$: c'est le plus petit élément strictement positif du groupe. Nous voyons donc qu'il est naturel de poser

$$n = \inf\{m \in G, m > 0\},$$

ainsi que nous le propose l'énoncé.

2.a. Il suffit ici d'utiliser les définitions.

Montrons que l'ensemble

$$E = \{m \in G, m > 0\}$$

n'est pas vide. En effet, il existe un élément $g \in \mathbb{Z} \cap G$ qui est différent de 0. Si $g > 0$, alors $g \in E$. Sinon, $g < 0$, donc $-g > 0$. Mais $-g \in G$, puisque G est un groupe. On en déduit que $-g \in E$.
Posons

$$n = \inf(E).$$

Observons que E est une partie de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément. Par conséquent, $n \in E$.

Les considérations précédentes sont plus subtiles qu'il n'y paraît. En effet, la borne inférieure d'une partie d'un groupe n'appartient pas nécessairement à ce groupe. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le groupe $(\mathbb{Q},+)$. On a, en effet,

$$\inf\{x \in \mathbb{Q}, x > 0\} = 0 \notin \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}.$$

2.b. Nous venons de montrer que $n \in E \subset G$ et nous devons, à présent, montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, nous avons encore $kn \in G$. Si $k \in \mathbb{N}$, ce n'est pas difficile. En effet, nous avons

$$kn = n + \cdots + n,$$

où le membre de droite comporte k termes. Puisque $n \in G$, nous avons $kn \in G$. Ce raisonnement se rédige proprement à l'aide d'une récurrence.

Montrons, par récurrence que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la proposition

$$H_k : « kn \in G »$$

est vraie.
• La proposition H_0 est vraie. En effet, nous avons

$$0n = 0 \in G,$$

car G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
• Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que H_k est vraie. Nous avons alors $kn \in G$. On en déduit que

$$(k+1)n = kn + n \in G,$$

car $kn \in G$, par hypothèse, et $n \in E \subset G$, d'après la question précédente. Par conséquent, la proposition H_{k+1} est vraie.
• Finalement, nous avons montré que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a $kn \in G$.

Nous avons traité le cas des éléments de la forme kn, avec $k \geqslant 0$. Il nous reste donc à montrer que les éléments de la forme kn, avec $k \leqslant 0$, appartiennent à G. Nous pouvons nous ramener au cas précédent en utilisant le fait que, si $k \leqslant 0$, alors $-k \geqslant 0$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant 0$. Nous avons alors $-k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, nous savons que $-kn \in G$. Son opposé kn appartient donc encore à G.
Finalement, nous avons montré que

$$n\mathbb{Z} \subset G.$$

2.c. Nous devons montrer que tout élément g de G s'écrit sous la forme $g = kn$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ ne possèdent pas de telle écriture en général. Cependant, nous pouvons les écrire de façon proche, à l'aide de la division euclidienne : quel que soit $g \in \mathbb{Z}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,\ldots,n-1\}$ tels que

$$g = qn + r.$$

Nous allons utiliser cette écriture pour aboutir au résultat. Plus précisément, nous voulons montrer que si l'on écrit un élément g de G sous la forme précédente, on a nécessairement $r = 0$.

Soit $g \in G$. Nous avons $n \in E$, donc $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons la division euclidienne de g par n.

Il est important de bien faire remarquer ici que $n \neq 0$. En effet, nous ne pourrions pas effectuer de division euclidienne si n était nul.

• Il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,\ldots,n-1\}$ tels que

$$g = qn + r.$$

D'après la question précédente, $n\mathbb{Z} \subset G$, donc $qn \in G$. Par conséquent, nous avons

$$r = g - qn \in G.$$

• Supposons, par l'absurde que $r \neq 0$. Nous disposons alors d'un élément r de G qui est strictement positif. Par conséquent, on a $r \in E$. On en déduit que $r \geqslant \inf(E) = n$. On aboutit à une contradiction.
• Nous venons de montrer que l'on a nécessairement $r = 0$. On en déduit que

$$g = qn \in n\mathbb{Z}.$$

Finalement, nous avons bien

$$G = n\mathbb{Z}.$$

Exercice 10.3 : Groupe des permutations (MPSI)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous nous intéresserons ici au groupe S_n des permutations de n éléments.

1. Soient $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ et $\sigma \in S_n$. Montrer que

$$\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j)).$$

2. Montrer que le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i\ i+1)$, avec $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.

3. Montrer que le groupe S_n est engendré par le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$.

1. Dans cette première question, nous devons vérifier une égalité entre deux permutations de n éléments. Pour cela, il nous suffit de vérifier que ces permutations

coïncident sur les éléments $1,\ldots,n$. Rappelons que la permutation $(\sigma(i)\ \sigma(j))$ est définie par

$$\begin{array}{ccc} \{1,\ldots,n\} & \to & \{1,\ldots,n\} \\ \sigma(i) & \mapsto & \sigma(j) \\ \sigma(j) & \mapsto & \sigma(i) \\ k \neq \sigma(i),\sigma(j) & \mapsto & k \end{array}$$

Nous allons montrer que la permutation $\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1}$ agit de la même façon sur l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.

- Nous avons

$$\begin{aligned} (\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})(\sigma(i)) &= (\sigma \circ (i\ j))(i) \\ &= \sigma(j). \end{aligned}$$

- De même,

$$(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})(\sigma(j)) = \sigma(i).$$

- Soit $k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{\sigma(i),\sigma(j)\}$. Nous avons alors $\sigma^{-1}(k) \notin \{i,j\}$ et donc

$$(i\ j)(\sigma^{-1}(k)) = (\sigma^{-1}(k)).$$

On en déduit que

$$(\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1})(k) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k.$$

- Finalement, nous avons montré que

$$\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j)).$$

2. Nous allons chercher à utiliser la question précédente avec les transpositions dont nous disposons. En choisissant la transposition $(1\ 2)$ et la permutation $\sigma = (2\ 3)$, on obtient

$$(2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 3).$$

Est-il possible d'obtenir la transposition $(1\ 4)$? Si l'on veut appliquer la méthode de la question précédente, il nous faut trouver une permutation σ envoyant 1 sur 1 et 3 sur 4, ou 1 sur 4 et 3 sur 3. La transposition $(3\ 4)$ convient. Nous avons donc

$$(3\ 4) \circ (1\ 3) \circ (3\ 4) = (1\ 4).$$

Nous voyons qu'il est possible d'obtenir par cette méthode toutes les transpositions du type $(1\ k)$, avec $k \in \{2,\dots,n\}$. Rédigeons ce premier résultat. Nous procéderons par récurrence.

Notons T le sous-ensemble de S_n formé de toutes les permutations que l'on peut obtenir en composant les transpositions $(i\ i+1)$, avec $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Montrons par récurrence que, quel que soit $k \in \{2,\dots,n\}$, la proposition

$$H_k : \text{« la transposition } (1\ k) \text{ appartient à } T \text{ »}$$

est vraie.
La proposition H_2 est vraie car la transposition $(1\ 2)$ appartient à T.

• Soit $k \in \{2,\dots,n-1\}$ tel que la proposition H_k est vraie. La transposition $(1\ k)$ appartient alors à T. Nous avons

$$(k\ k+1) \circ (1\ k) \circ (k\ k+1) = (1\ k+1).$$

Par conséquent, la transposition $(1\ k+1)$ appartient à T et la proposition H_{k+1} est vraie.

• Finalement, quel que soit $k \in \{2,\dots,n\}$, la transposition $(1\ k)$ appartient à T.

Nous devons maintenant obtenir toutes les transpositions manquantes. Soient $i, j \in \{2,\dots,n\}$ avec $j \geqslant i+2$. Comment obtenir la transposition $(i\ j)$? D'après le résultat que nous venons de démontrer, nous savons échanger 1 avec n'importe quel autre élément. Il est donc naturel de chercher à passer par 1 pour échanger i et j. Nous échangerons donc d'abord 1 et i, puis 1 et j. On obtient

$$(1\ j) \circ (1\ i) = (1\ i\ j).$$

Nous avons bien réussi à envoyer i sur j, mais j est envoyé sur 1. Nous allons donc envoyer 1 sur i à la fin. Nous obtenons

$$(1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i) = (i\ j).$$

Remarquons que cette formule est encore du type considéré à la première question. Nous utiliserons cette observation dans la rédaction.

• Montrons que toutes les transpositions de S_n appartiennent à T. Soient $i, j \in \{1,\dots,n\}$ avec $i < j$. Si $i = 1$, cela découle du résultat précédent. Supposons que $i \geqslant 2$. Posons $\sigma = (1\ i)$. On a $\sigma(1) = i$ et $\sigma(j) = j$, car $i \neq j$. D'après la question **1.**, on a donc

$$\sigma \circ (1\ j) \circ \sigma^{-1} = (1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i) = (i\ j).$$

Par conséquent, la transposition $(i\ j)$ appartient à T.

• Finalement, toutes les transpositions appartiennent à T. Or nous savons que les transpositions engendrent S_n. On en déduit que $T = S_n$ et donc que les transpositions $(i\ i+1)$, avec $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, engendrent S_n.

3. Cette fois-ci, nous ne disposons que de deux éléments : le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$. La formule de la première question appliquée avec ces deux éléments nous donne

$$(1\ 2\ \ldots\ n) \circ (1\ 2) \circ (1\ 2\ \ldots\ n)^{-1} = (2\ 3).$$

En continuant ainsi, nous pouvons obtenir toutes les transpositions $(i\ i+1)$, avec $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Nous savons, d'après la question précédente, que ces transpositions engendrent S_n.

Cependant, nous avons eu besoin pour écrire la formule d'utiliser la permutation

$$(1\ 2\ \ldots\ n)^{-1} = (1\ n\ n-1\ \ldots\ 2).$$

Comment obtenir cette permutation en utilisant seulement $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et $(1\ 2)$? Le cycle dont nous disposons, $(1\ 2\ \ldots\ n)$, correspond à des décalages de 1 dans les indices. Le cycle que nous voulons obtenir, $(1\ n\ n-1\ \ldots\ 2)$, correspond à des décalages de $n-1$, mais est du même type. Nous allons donc prendre la puissance $(n-1)$-ième du premier cycle afin d'obtenir des décalages de $n-1$ et le second cycle. Nous rédigerons tout cela par récurrence.

Notons $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$. Montrons par récurrence que, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$H_k : \text{« } \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \sigma^k(i) = i + k \bmod n \text{ »}$$

est vraie.

• La proposition H_1 est vraie par définition de σ.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition H_k soit vraie. On a alors

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \sigma^k(i) = i + k \bmod n.$$

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Notons j l'unique élément de $\{1,\ldots,n\}$ tel que $j = i + k \bmod n$. Nous avons alors $\sigma^k(i) = j$. On a

$$\begin{aligned} \sigma^{k+1}(i) &= \sigma(\sigma^k(i)) \\ &= \sigma(j) \\ &= j + 1 \bmod n \\ &= i + k + 1 \bmod n. \end{aligned}$$

Par conséquent, la proposition H_{k+1} est vraie.

• Finalement, la proposition H_k est vraie, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$. En particulier, pour $k = n - 1$, on trouve

$$\sigma^{n-1}(1) = n,\, \sigma^{n-1}(2) = 1, \ldots, \sigma^{n-1}(n) = n - 1.$$

On en déduit que

$$\sigma^{n-1} = (1\; n\; n-1\; \ldots\; 2) = \sigma^{-1}.$$

Montrons, à présent, par récurrence que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, la proposition

K_i : « on peut engendrer la transposition $(i\; i+1)$ à l'aide de σ et de $(1\; 2)$ »

est vraie.

• La proposition H_1 est vraie car la transposition recherchée est justement la transposition $(1\; 2)$ dont l'on dispose.

• Soit $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que la proposition H_i est vraie. On peut donc engendrer la transposition $(i\; i+1)$ à l'aide de σ et de $(1\; 2)$. D'après la question **1.**, on a

$$\begin{aligned} \sigma \circ (i\; i+1) \circ \sigma^{n-1} &= \sigma \circ (i\; i+1) \circ \sigma^{-1} \\ &= (\sigma(i)\; \sigma(i+1)) = (i+1\; i+2). \end{aligned}$$

On en déduit que l'on peut engendrer la transposition $(i+1\; i+2)$ à l'aide de σ et de $(1\; 2)$ et que la proposition H_{i+1} est vraie.

• Finalement, nous pouvons engendrer toutes les transpositions $(i\; i+1)$, avec $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, à l'aide de σ et $(1\; 2)$. D'après la question **2.**, on en déduit que l'on peut engendrer S_n avec ces mêmes éléments.

Arithmétique

11

Exercice 11.1 : Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que, pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n[p]$.

3. Montrer que si, de plus, p ne divise pas n, alors $n^{p-1} \equiv 1[p]$.

4. Montrer que ces résultats restent vrais pour $p = 2$.

1. Nous allons utiliser la propriété suivante, appelée lemme de Gauβ : si un nombre premier divise un produit alors il divise au moins l'un des facteurs du produit.

Par définition :

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

On a donc

$$p! = k!(p-k)!\binom{p}{k}.$$

Comme p divise $p!$, p divise le produit

$$k!(p-k)!\binom{p}{k} = 1 \times \cdots \times k \times 1 \times \cdots \times (p-k) \times \binom{p}{k}.$$

p étant premier, il divise donc au moins l'un des facteurs de ce produit. Cependant, p ne divise aucun des entiers compris entre 1 et k ni aucun de ceux compris entre 1 et $p-k$ car $0 < k < p$ et $0 < p-k < p$; ainsi, p divise $\binom{p}{k}$.

Bien noter où intervient la primalité de p : p divise un produit donc divise au moins l'un des facteurs du produit.
En revanche, le fait que p ne divise aucun entier compris strictement entre 0 et p n'a rien à voir avec le fait que p soit premier : aucun entier N ne peut diviser un entier compris strictement entre 0 et N car ces deux nombres sont deux multiples consécutifs de N.

2. Nous allons commencer par établir le résultat par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Les $\binom{p}{k}$ apparaîtront naturellement en développant une puissance p-ième avec le binôme de Newton.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « $n^p \equiv n[p]$ ».

- H_0 : clairement vraie car $0^p = 0 \equiv 0[p]$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^p \equiv n[p]$.

Alors, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k.$$

Or, si $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$ d'après la première question, *i.e.*

$$\binom{p}{k} \equiv 0[p]$$

d'où

$$\binom{p}{k} n^k \equiv 0[p].$$

Ainsi, dans la somme, tous les termes dont l'indice k est compris entre 1 et $p-1$ sont congrus à 0 modulo p ; la congruence se réduit donc à

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1[p].$$

Or, d'après H_n :

$$n^p \equiv n[p]$$

d'où

$$(n+1)^p \equiv n + 1[p].$$

H_{n+1} est donc vraie.

• En conclusion, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n[p].$$

Pour traiter le cas où $n < 0$ on se ramène au cas précédent en considérant $-n$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geqslant 0$, le résultat est acquis. Si $n < 0$, alors $-n > 0$ et le résultat précédent appliqué à $-n$ donne :

$$(-n)^p \equiv -n[p].$$

Or p est impair donc $(-n)^p = -n^p$, d'où le résultat :

$$n^p \equiv n[p].$$

3. On ne peut pas se contenter de dire « simplifions la congruence par n » car ce type de calcul n'est en général pas licite.

Par exemple, on a $2 \times 2 \equiv 2 \times 0[4]$ mais 2 n'est pourtant pas congru à 0 modulo 4.

Il va donc falloir revenir à la définition des congruences et exploiter correctement les deux hypothèses : p est premier et ne divise pas n.

On a $n^p \equiv n[p]$, *i.e.* p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
p étant premier, il divise au moins l'un des facteurs ; or, par hypothèse, p ne divise pas n, donc p divise $n^{p-1} - 1$, *i.e.* :

$$n^{p-1} \equiv 1[p].$$

4. Pourquoi l'énoncé distingue-t-il les cas p impair et $p = 2$? Si l'on regarde les calculs précédents, l'hypothèse « p impair » n'intervient que pour montrer le résultat de la deuxième question dans le cas $n < 0$.

• Le résultat de la première question est vrai : la démonstration est encore valable dans le cas $p = 2$.

• Le résultat de la deuxième question est vrai pour $n \geqslant 0$: encore une fois, la démonstration est encore valable car elle n'utilise pas la parité de p.

• Considérons désormais un entier $n < 0$. On a alors, comme précédemment,

$$(-n)^2 \equiv -n[2]$$

d'où

$$n^2 \equiv -n[2].$$

Cependant,

$$-n \equiv n[2]$$

donc

$$n^2 \equiv n[2].$$

Le résultat de la deuxième question reste donc vrai avec $p = 2$.
• Enfin, le résultat de la troisième question se déduisait de celui de la deuxième en utilisant le fait que p est premier mais sans utiliser sa parité ; cette déduction reste donc valable si $p = 2$ et le résultat est donc également vrai.

Exercice 11.2 : Congruences et restes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{10^n} par 7.

10^{10^n} signifie $10^{(10^n)}$.

En conséquence :

$$\begin{aligned} 10^{10^{n+1}} &= 10^{(10^n \times 10)} \\ &= (10^{10^n})^{10}. \end{aligned}$$

Ainsi, chaque terme est égal au précédent élevé à la puissance 10.

Pour alléger les notations posons $u_n = 10^{10^n}$.

Nous venons de rappeler que $u_{n+1} = u_n^{10}$: ceci suggère d'essayer de trouver le résultat par tâtonnements pour de petites valeurs de n puis de le vérifier rigoureusement par récurrence.

Le titre suggère d'utiliser des congruences. Rappelons la relation entre congruence et division euclidienne : le reste de la division euclidienne de a par $b > 0$ est l'unique entier r vérifiant les deux relations :

$$a \equiv r[b]$$
$$0 \leqslant r \leqslant b - 1.$$

Illustrons la méthode générale en déterminant la solution du problème pour $n = 1$:

$$10 \equiv 3 \quad [7]$$

En élevant au carré :

$$\begin{aligned} 10^2 &\equiv 9 \quad [7] \\ &\equiv 2 \quad [7] \end{aligned}$$

Nous avons simplifié la congruence en utilisant le fait que $9 \equiv 2[7]$. Le but étant d'obtenir à la fin une congruence avec un entier naturel inférieur ou égal à 6 il est intéressant, à chaque étape, de simplifier au maximum la congruence.

En élevant encore deux fois au carré on obtient de même :

$$\begin{array}{rcrl} 10^4 & \equiv & 4 & [7] \\ 10^8 & \equiv & 16 & [7] \\ & \equiv & 2 & [7] \end{array}$$

et enfin, en multipliant la relation avec 10^8 par celle avec 10^2 :

$$10^{10} \equiv 4 \quad [7]$$

Comme $0 \leqslant 4 \leqslant 7 - 1$ ceci montre que le reste de la division euclidienne de 10^{10} par 7 est 4.

Comme $u_2 = u_1^{10}$, on a :

$$u_2 \equiv 4^{10}[7].$$

On peut reprendre un raisonnement analogue au précédent en partant de 4 au lieu de 10 et on obtient, tous calculs faits :

$$4^{10} \equiv 4[7]$$

i.e. le reste de la division euclidienne de u_2 par 7 est 4.

On voit alors qu'en répétant l'opération (élévation à la puissance 10) on obtiendra toujours 4 : voici notre réponse qu'il ne reste plus qu'à formaliser dans une hypothèse de récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons H_n : « $u_n \equiv 4[7]$ ».

- H_1 : vraie, c'est le calcul fait précédemment en exemple.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie, *i.e.* :

$$u_n \equiv 4[7].$$

Alors :

$$u_{n+1} \equiv 4^{10}[7].$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} 4^2 &\equiv 16 \quad [7] \\ &\equiv 2 \quad [7] \\ 4^4 &\equiv 4 \quad [7] \\ 4^8 &\equiv 16 \quad [7] \\ &\equiv 2 \quad [7] \\ 4^{10} &\equiv 4^8 \times 4^2 \quad [7] \\ &\equiv 4 \quad [7] \end{aligned}$$

d'où

$$u_{n+1} \equiv 4[7].$$

H_{n+1} est donc vraie.

• En conclusion, on a $u_n \equiv 4[7]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $0 \leqslant 4 \leqslant 7-1$, 4 est le reste de la division euclidienne de u_n par 7.

Pour passer de la congruence au reste il faut vérifier l'encadrement $0 \leqslant 4 \leqslant 7-1$.
En effet, on a par exemple également $u_n \equiv -3[7]$ mais -3 n'en est pas pour autant le reste de la division, vu qu'il ne vérifie pas cet encadrement.

Exercice 11.3 : Équation diophantienne (MPSI)

1. Déterminer l'entier $d = \text{pgcd}(495, 147)$ et deux entiers relatifs u et v tels que $147u + 495v = d$.

2. Déterminer un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $147x_0 + 495y_0 = 12$.

3. En déduire tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $147x + 495y = 12$.

1. Le pgcd peut être calculé par l'algorithme d'Euclide. Mieux encore : les calculs que nous ferons pourront être réutilisés afin de déterminer les entiers u et v.

Il est bien plus efficace d'utiliser cet algorithme pour calculer un pgcd que de déterminer les décompositions en facteurs premiers ; le fait qu'il nous permette ensuite de déterminer les coefficients de la relation de Bézout est une raison de plus pour l'utiliser sans hésiter.

En appliquant l'algorithme d'Euclide on obtient les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{ccccccccc} 495 & = & 147 & \times & 3 & + & 54 \\ 147 & = & 54 & \times & 2 & + & 39 \\ 54 & = & 39 & \times & 1 & + & 15 \\ 39 & = & 15 & \times & 2 & + & 9 \\ 15 & = & 9 & \times & 1 & + & 6 \\ 9 & = & 6 & \times & 1 & + & 3 \\ 6 & = & 3 & \times & 2 & + & 0 \end{array}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul, $i.e.\ d = 3$.

Afin de déterminer les coefficients de Bézout on reprend les égalités précédentes dans l'ordre. Dans chacun, on exprime le reste en fonction du dividende et du diviseur et on reporte dans les suivantes : c'est l'algorithme d'Euclide étendu.

En utilisant les résultats précédents :

$$\begin{array}{rcl} 54 & = & 495 - 147 \times 3 \\ 39 & = & 147 - 54 \times 2 \\ & = & 147 - (495 - 147 \times 3) \times 2 \\ & = & 147 \times 7 - 495 \times 2 \\ 15 & = & 54 - 39 \\ & = & (495 - 147 \times 3) - (147 \times 7 - 495 \times 2) \\ & = & 495 \times 3 - 147 \times 10 \\ 9 & = & 39 - 15 \times 2 \\ & = & (147 \times 7 - 495 \times 2) - (495 \times 3 - 147 \times 10) \times 2 \\ & = & 147 \times 27 - 495 \times 8 \\ 6 & = & 15 - 9 \\ & = & (495 \times 3 - 147 \times 10) - (147 \times 27 - 495 \times 8) \\ & = & 495 \times 11 - 147 \times 37 \\ 3 & = & 9 - 6 \\ & = & (147 \times 27 - 495 \times 8) - (495 \times 11 - 147 \times 37) \\ & = & 147 \times 64 - 495 \times 19 \end{array}$$

On peut donc prendre $(u, v) = (64, -19)$.

2. Il suffit de tout multiplier par 4.

De la relation

$$147 \times 64 + 495 \times (-19) = 3$$

on tire, en multipliant par 4 :

$$147 \times 256 + 495 \times (-76) = 12.$$

Le couple $(x_0, y_0) = (256, -76)$ convient donc.

3. L'idée est analogue à celle utilisée pour résoudre les équations différentielles dont le second membre n'est pas nul : en soustrayant la relation $147x_0 + 495y_0 = 12$ à $147x + 495y = 12$, on se ramène à une équation « homogène ».

Soit un couple (x, y) convenant. Alors

$$147x + 495y = 12 = 147x_0 + 495y_0$$

d'où, en soustrayant les deux relations :

$$147(x - x_0) = 495(y_0 - y).$$

Le problème est que 147 et 495 ne sont pas premiers entre eux : le lemme de Gauß ne s'applique donc pas… Mais on peut toujours diviser la relation par leur pgcd afin de pouvoir l'utiliser !

En divisant par $\text{pgcd}(147{,}495) = 3$ on obtient

$$49(x - x_0) = 165(y_0 - y)$$

et $\text{pgcd}(49, 165) = 1$.

Ainsi, 165 divise $49(x - x_0)$; comme 49 et 165 sont premiers entre eux, 165 divise donc $x - x_0$. Ainsi, il existe un entier relatif k tel que $x = x_0 + 165k$.
En reportant, il vient $49(x - x_0) = 49 \times 165k$, soit

$$49 \times 165k = 165(y_0 - y)$$

et enfin, en simplifiant par 165 :

$$y = y_0 - 49k.$$

Ainsi, d'après les valeurs précédemment trouvées :

$$(x, y) = (256 + 165k, -76 - 49k).$$

Réciproquement, on vérifie aisément que tout couple de cette forme convient : les solutions sont donc les couples

$$(x, y) = (256 + 165k, -76 - 49k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Algèbre linéaire

12

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 12.1 : Fonctions paires et fonctions impaires

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E.

1. Montrer que les ensembles P et I, munis des structures induites par celle de E, sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer qu'on a l'égalité $P \oplus I = E$.

1. On applique ici la définition du cours pour montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un autre.

Montrons, tout d'abord, que P est un sous-espace vectoriel de E.

- La fonction nulle est paire. On a donc $0 \in P$.
- Soient $f, g \in P$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

car f et g sont paires. On en déduit que $f + g \in P$.

- Soit $f \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$

car f est paire. On en déduit que $\lambda f \in P$.

Nous avons montré que P est un sous-espace vectoriel de E.

Un raisonnement similaire montre que I est un sous-espace vectoriel de E.

2. Cette deuxième question en recouvre deux : nous devons montrer que les espaces P et I sont en somme directe, autrement dit, que

$$P \cap I = \{0\}$$

et que leur somme est égale à E, autrement dit, que

$$P + I = E.$$

Somme directe

Nous allons commencer par montrer que les espaces sont en somme directe. Il suffit pour cela de montrer que $P \cap I = \{0\}$.

> Pour commencer, montrons que les espaces P et I sont en somme directe. Soit $f \in P \cap I$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(-x)$, car $f \in P$, mais aussi $f(x) = -f(-x)$, car $f \in I$. On en déduit, en ajoutant les deux égalités, que $2f(x) = 0$ et donc que $f(x) = 0$. Nous venons de montrer que f est la fonction nulle. On en déduit que $P \cap I = \{0\}$, ce qu'il fallait démontrer.

Somme des espaces

Il nous reste à montrer que $P + I = E$. Autrement dit, nous devons montrer que tout élément f de E se décompose sous la forme $f = g + h$, avec $g \in P$ et $h \in I$. Dans ce genre de cas, on raisonne par analyse et synthèse. Soit $f \in E$. Supposons que la fonction f s'écrive sous la forme $f = g + h$, avec $g \in P$ et $h \in I$. Alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

et

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

On en déduit que $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ et $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$. L'étape d'analyse est terminée.

Nous allons rédiger directement l'étape de synthèse. Insistons une nouvelle fois : l'étape d'analyse doit être faite au brouillon et seule l'étape de synthèse figure dans la rédaction finale.

Montrons, à présent, que $P + I = E$. Soit $f \in E$. Soient g et h les fonctions de E définies par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}$$

et

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}.$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

et

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

Par conséquent, $g \in P$ et $h \in I$.

En outre, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

On en déduit que $f = g + h$. Nous avons montré que $P + I = E$ et donc, finalement, que $P \oplus I = E$.

Exercice 12.2 : Images et noyaux I

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les équivalences suivantes sont vraies.

1. $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

2. $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

Cet exercice n'est pas difficile. Il s'agit simplement de se souvenir des définitions vues en cours et de les appliquer. Aucune astuce n'est requise. Nous allons volontairement proposer une correction très détaillée. À chaque question, nous devons montrer l'équivalence entre deux égalités. Nous décomposerons chaque équivalence en deux implications et chaque égalité en deux inclusions.

Au préalable, rappelons les deux traductions suivantes qu'il est indispensable de connaître : si g désigne un endomorphisme de E et y un élément de E, on a

$$y \in \mathrm{Ker}(g) \iff g(y) = 0$$

et

$$y \in \mathrm{Im}(g) \iff \exists z \in E, y = g(z).$$

1. Première implication

• Première égalité

L'une des deux inclusions formant l'égalité est évidente.

> Supposons que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \supset \{0\}$ est claire. En effet, puisque $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $0 \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $0 \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

• Seconde égalité

Pour finir la démonstration de la première implication, il nous reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$. Soit donc un élément x de $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Nous voulons montrer qu'il est nul. Nous disposons de deux informations :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{Im}(f),$$

autrement dit,

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists y \in E, x = f(y).$$

En les combinant, on obtient $f(f(y)) = 0$, ce que l'on traduit immédiatement par $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Or, nous avons supposé que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, $f(y) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. C'est ce que nous voulions démontrer. Répétons ce raisonnement de manière plus concise.

> Il nous reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a
>
> $$0 = f(x) = f(f(y)).$$
>
> On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ et donc que $x = f(y) = 0$.

Seconde implication

• Première inclusion

Comme précédemment, l'une des deux inclusions est immédiate.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. Montrons que $\operatorname{Ker}(f^2) \supset \operatorname{Ker}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Par définition, on a $f(x) = 0$ et donc $f^2(x) = f(0) = 0$. On en déduit que $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$.

• Seconde inclusion

Démontrons l'inclusion réciproque : $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$. Il nous faut, à présent, utiliser l'hypothèse $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. Pour cela, nous avons besoin d'un élément $y \in E$ qui soit à la fois dans le noyau de f, c'est-à-dire qui vérifie $f(y) = 0$, et dans l'image de f, c'est-à-dire de la forme $y = f(z)$, avec $z \in E$. Que connaissons-nous comme éléments de l'image de f ? Un seul semble adapté au problème : c'est $f(x)$. Appartient-il au noyau de f ? Oui, puisque nous venons de supposer que $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, autrement dit, que $f(f(x)) = 0$. Voilà notre candidat.

Démontrons l'inclusion réciproque : $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$. On a $f(f(x)) = 0$. Par conséquent, $f(x) \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Par hypothèse, on a $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. On en déduit que $f(x) = 0$, autrement dit que $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Nous venons de démontrer l'inclusion voulue et, finalement, l'égalité $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$.

2. Cette deuxième question n'est pas plus difficile que la première. Il suffit de raisonner pas à pas en retraduisant patiemment. Nous allons la rédiger directement.

Supposons que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$. L'inclusion $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) \subset E$ est évidente car $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrons l'inclusion réciproque : $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) \supset E$. Soit $x \in E$. Par hypothèse, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$, donc $f(x) \in \operatorname{Im}(f^2)$. On en déduit qu'il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f(f(y))$, autrement dit $f(x - f(y)) = 0$, ou encore $x - f(y) \in \operatorname{Ker}(f)$. En écrivant $x = (x - f(y)) + f(y)$, on montre que $x \in \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = E$. L'inclusion $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ est toujours vraie. En effet, soit $x \in \operatorname{Im}(f^2)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(f(y))$. Par conséquent, $x = f(z)$, avec $z = f(y)$, donc $x \in \operatorname{Im}(f)$.
Démontrons l'inclusion réciproque : $\operatorname{Im}(f^2) \supset \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.

À ce stade de l'exercice, nous devons utiliser l'hypothèse $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. Elle nous permettra de décomposer un élément de E bien choisi sous la forme $a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f)$ et $b \in \mathrm{Im}(f)$. Quel élément choisir ? Nous n'avons en fait que deux possibilités : les éléments x et y. Le vecteur x appartient à l'image de f et il est donc déjà sous cette forme (il suffit de l'écrire $x = 0 + x$, puisque $0 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x \in \mathrm{Im}(f)$). Il est donc naturel de chercher à décomposer y.

Utilisons l'hypothèse $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$: il existe $a \in \mathrm{Ker}(f)$ et $b \in \mathrm{Im}(f)$ tels que $y = a + b$. Il existe $c \in E$ tel que $b = f(c)$. Réinjectons, à présent, ces éléments dans l'égalité $x = f(y)$. On obtient

$$x = f(a + f(c)) = f(a) + f(f(c)) = f(f(c)),$$

car $a \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $x \in \mathrm{Im}(f^2)$. Nous venons de démontrer l'inclusion voulue et, finalement, l'égalité $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 12.3 : Somme de projecteurs

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Supposons que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et que $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

1. Rappelons, tout d'abord, qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si, et seulement si, il vérifie l'égalité $f^2 = f$. En particulier, on a $p^2 = p$ et $q^2 = q$. L'exercice nous propose de nous intéresser au fait que $p + q$ soit un projecteur. Calculons donc $(p + q)^2$: on a

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= (p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p + q + p \circ q + q \circ p.\end{aligned}$$

On pourrait être tenté, par analogie avec l'identité remarquable que l'on connaît par exemple dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, d'écrire $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \circ q$. Cette formule est en général fausse dans un anneau, car les éléments p et q n'ont aucune raison de commuter. Nous n'avons pas d'autre choix que de développer la formule terme à terme.

Passons maintenant à la résolution de l'exercice. On nous demande de démontrer une équivalence : nous allons donc raisonner en démontrant deux implications. Au vu de la formule précédente, l'un des deux sens de l'équivalence est très simple. Rédigeons-le.

Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p + q,\end{aligned}$$

car p et q sont des projecteurs. On en déduit que $p+q$ est un projecteur.

Pour démontrer l'implication réciproque, nous allons supposer que $p+q$ est un projecteur. Nous devons alors montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. On a $(p+q)^2 = p+q$, d'où $p + q + p \circ q + q \circ p = p + q$ et donc $p \circ q + q \circ p = 0$.

Nous avons retraduit l'hypothèse en une formule reliant p et q. Nous allons manipuler cette formule afin d'en obtenir d'autres en utilisant les seules égalités dont nous disposons : $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Pour faire apparaître des termes de la forme p^2 ou q^2, nous pouvons composer l'égalité par p ou par q, à gauche ou à droite. Afin de rendre la rédaction la plus propre possible, nous conseillons au lecteur d'écrire toutes les égalités obtenues au brouillon, puis de les combiner afin d'arriver à la solution. Dans la rédaction finale, on ne conservera que les égalités qui nous ont effectivement servi.

Réciproquement, supposons que $p+q$ est un projecteur. On a

$$\begin{aligned}p+q &= (p+q)^2 \\ &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p + p \circ q + q \circ p + q.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1) \qquad p \circ q + q \circ p = 0.$$

En composant par p à gauche, on obtient $p^2 \circ q + p \circ q \circ p = 0$, c'est-à-dire

$$(2) \qquad p \circ q + p \circ q \circ p = 0.$$

En composant l'égalité (1) par p à droite, on obtient $p \circ q \circ p + q \circ p^2 = 0$, soit

$$(3) \qquad p \circ q \circ p + q \circ p = 0.$$

En soustrayant les égalités (2) et (3), on trouve

$$(4) \qquad p \circ q - q \circ p = 0.$$

En additionnant (1) et (4), on obtient $2p \circ q = 0$. En les soustrayant, on obtient $2q \circ p = 0$. On en déduit finalement que

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Nous devons démontrer deux égalités. Nous raisonnerons à chaque fois en démontrant deux inclusions.

Première égalité

• Première inclusion

Commençons par démontrer que $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Pour débuter cette preuve, il n'y a pas à réfléchir : on fixe un élément x de $\mathrm{Im}(p+q)$ et on traduit la condition d'appartenance. Écrivons-le directement.

Démontrons, tout d'abord, l'égalité $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Commençons par montrer que l'on a $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p+q)$. Alors il existe $y \in E$ tel que

$$x = (p+q)(y) = p(y) + q(y).$$

Puisque $p(y) \in \mathrm{Im}(p)$ et que $q(y) \in \mathrm{Im}(q)$, on a bien $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Cette première inclusion provient directement des définitions et reste vraie si l'on remplace p et q par n'importe quels endomorphismes de E. C'est pour démontrer l'inclusion réciproque que nous aurons besoin d'utiliser l'hypothèse que $p+q$ est un projecteur. Grâce à la question précédente, nous savons que cela signifie que $p \circ q = q \circ p = 0$.

• Seconde inclusion

Nous voulons, à présent, démontrer l'inclusion réciproque : $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$. Commençons par la première. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Traduisons cette appartenance : il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

Nous chercherons à montrer que $x \in \mathrm{Im}(p+q)$, autrement dit, à écrire l'élément x sous la forme $(p+q)(z)$, avec $z \in E$. Nous ne connaissons que deux éléments particuliers de E : y et x. Ce sont nos meilleurs candidats pour z. Nous allons les essayer tous les deux.

Commençons par y. Malheureusement, nous ne possédons aucune information sur $(p+q)(y) = p(y) + q(y)$.

Essayons avec x : on a $(p+q)(x) = (p+q)(p(y)) = p^2(y) + q \circ p(y) = p(y) = x$. C'est le résultat que nous cherchions.

> Réciproquement, montrons que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. On en déduit que
>
> $$(p+q)(x) = (p+q)(p(y)) = p^2(y) + q \circ p(y) = p(y) = x,$$
>
> car $q \circ p = 0$, d'après la question précédente. On en déduit que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p+q)$. On montre de même que $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$ et l'on en déduit que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Seconde égalité

Démontrons, à présent, l'égalité $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

• Première inclusion

Nous allons commencer par l'inclusion $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p+q)$. Il n'y a pas à réfléchir pour cette étape : on traduit simplement les différentes conditions d'appartenance.

> Démontrons, à présent, l'égalité $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Par définition, on a $p(x) = q(x) = 0$, d'où $(p+q)(x) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p+q)$.

> Remarquons que cette inclusion reste vraie si l'on remplace p et q par n'importe quels endomorphismes de E.

• Seconde inclusion

Il nous reste à démontrer l'inclusion réciproque : $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Pour cela, on fixe $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, on retraduit cette appartenance par $(p+q)(x) = 0$ et l'on cherche, en manipulant cette égalité, à montrer que $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, autrement dit, que $p(x) = q(x) = 0$.

> Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. On a $(p+q)(x) = 0$. En appliquant p aux deux membres de l'égalité, on obtient
>
> $$p((p+q)(x)) = p^2(x) + p \circ q(x) = p(x) = 0,$$

car $p \circ q = 0$, d'après la question précédente. On en déduit que $x \in \text{Ker}(p)$. On montre de même que $x \in \text{Ker}(q)$ et l'on en déduit finalement que $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Exercice 12.4 : L'espace vectoriel des polynômes

Dans cet exercice, nous nous intéresserons à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP(X) \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ injectif mais pas surjectif.

2. Montrer que l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ surjectif mais pas injectif.

1. La première étape consiste à montrer que φ est un endomorphisme.

Montrons, tout d'abord, que l'application φ est bien linéaire.

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(P+Q) &= X(P+Q)(X) \\ &= XP(X) + XQ(X) \\ &= \varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

- Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P) &= X\lambda P(X) \\ &= \lambda XP(X) \\ &= \lambda\varphi(X). \end{aligned}$$

On en déduit que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Continuons en montrant que l'endomorphisme φ est injectif. Pour ce problème, on raisonne toujours de la même façon : on montre que le noyau de l'endomorphisme φ est nul.

Montrons, à présent, que l'endomorphisme φ est injectif. Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. On a alors $XP(X) = 0$. Puisque le polynôme X n'est pas nul, on a nécessairement $P(X) = 0$.

Il nous reste à montrer que l'endomorphisme φ n'est pas surjectif, autrement dit que certains polynômes de $\mathbb{K}[X]$ n'appartiennent pas à l'image de φ. Une bonne façon de procéder est de chercher une propriété que vérifient tous les éléments de l'image. Dans notre cas, les éléments $Q(X)$ de l'image sont de la forme $Q(X) = XP(X)$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$. On observe que l'on a nécessairement $Q(0) = 0$. Il est clair que tous les éléments de $\mathbb{K}[X]$ ne vérifient pas tous cette propriété.

Montrons, à présent, que l'endomorphisme φ n'est pas surjectif. Plus précisément, nous allons montrer que le polynôme 1 n'appartient pas à l'image de φ. En effet, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi(P) = XP(X) = 1$. En prenant la valeur en 0 de ces deux polynômes, nous obtiendrions $1 = 0$, ce qui est absurde.

2. Comme précédemment, nous allons commencer par montrer que φ est un endomorphisme.

Montrons, tout d'abord, que l'application ψ est bien linéaire.

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$\begin{aligned} \psi(P+Q) &= (P+Q)' \\ &= P' + Q' \\ &= \psi(P) + \psi(Q). \end{aligned}$$

- Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in k$. On a

$$\begin{aligned} \psi(\lambda P) &= (\lambda P)' \\ &= \lambda P' \\ &= \lambda \psi(X). \end{aligned}$$

On en déduit que l'application ψ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Nous devons ensuite montrer que l'endomorphisme ψ est surjectif. Pour cela, on procède toujours de la même manière. On fixe un élément Q de l'espace vectoriel d'arrivée $\mathbb{K}[X]$ et on cherche un élément P de l'espace de départ $\mathbb{K}[X]$ qui est envoyé par ψ sur Q. Dans notre cas, l'application ψ est la dérivation. Nous devons donc trouver une primitive du polynôme Q, ce qui peut se faire explicitement.

Montrons, à présent, que l'endomorphisme ψ est surjectif. Soit Q un élément de $\mathbb{K}[X]$. Il possède une écriture sous la forme

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i,$$

où $a_i \in \mathbb{K}$, quel que soit $i \in \{0,\ldots,d\}$. Posons

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}.$$

On vérifie immédiatement, que l'on a bien $\psi(P) = P' = Q$.

Il nous reste à montrer que l'endomorphisme ψ n'est pas injectif. Pour cela, il nous suffit de montrer que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Dans notre cas, ce problème est très simple puisque tous les polynômes constants sont envoyés sur 0 par l'application de dérivation ψ.

Montrons, à présent, que l'endomorphisme ψ n'est pas injectif. Il nous suffit, pour cela, d'observer que $\psi(1) = 0$.

Les résultats que nous venons de démontrer sont propres aux espaces vectoriels de dimension infinie. En effet, rappelons que si E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E, on a les équivalences

$$f \text{ est injectif} \Longleftrightarrow f \text{ est surjectif} \Longleftrightarrow f \text{ est bijectif.}$$

Ainsi retrouvons-nous, en particulier, le fait que l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 12.5 : Familles libres

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, nous définissons deux éléments c_k et e_k de E par

$$c_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(kx) \end{array}$$

et

$$e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{kx} \end{array}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(c_0,\ldots,c_n)$ est libre.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(e_0,\ldots,e_n)$ est libre.

1. Par définition d'une famille libre, nous devons montrer que, quels que soient $u_0, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\sum_{k=0}^{n} u_k c_k = 0,$$

on a $u_0 = \cdots = u_n = 0$.

Dans la situation précédente, comment procéder pour montrer que $u_0 = \cdots = u_n = 0$? Nous disposons, par hypothèse, d'une relation entre les u_k :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k c_k = 0.$$

Nous allons chercher à manipuler cette relation afin d'en obtenir de nouvelles, en espérant qu'elles nous permettront, sinon de résoudre, du moins de simplifier le problème.

De nombreuses possibilités s'offrent à nous : nous pouvons composer par des fonctions à gauche ou à droite, prendre les valeurs en certains points, calculer des limites, des périodicités, *etc*. Il existe plusieurs façons de résoudre ce problème, mais nous allons essayer d'en trouver une aussi simple que possible.

Avant de manipuler l'équation, il est utile de se demander quelles sont les propriétés vérifiées par les fonctions c_k. Elles sont paires, mais nous n'obtiendrons aucune nouvelle relation en utilisant cette propriété. Ces fonctions sont périodiques, mais on voit mal comment en tirer une nouvelle relation. En revanche, nous obtiendrons une information intéressante à partir de la dérivation. Pour tout indice k, on a $c_k'' = -k^2\, c_k$. En dérivant deux fois la relation

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n} u_k c_k = 0,$$

nous obtenons

$$(2) \quad -\sum_{k=0}^{n} u_k k^2\, c_k = 0.$$

Nous sommes parvenus à obtenir une nouvelle relation (2), proche de la première. Rendons-les plus proches encore en multipliant la relation (1) par n^2 :

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n} u_k n^2\, c_k = 0.$$

En additionnant, à présent, la relation (2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k(n^2 - k^2)\, c_k = 0.$$

Remarquons que le dernier terme à disparu. Nous sommes parvenus à passer d'une relation contenant $n+1$ termes à une relation n'en contenant plus que n. Cette observation nous invite à tenter de démontrer le résultat voulu par récurrence.

Nous allons montrer, par récurrence, que, quel que soit $m \in \{0,\dots,n\}$, la proposition

$$H_m : \text{« la famille } (c_0,\dots,c_m) \text{ est libre »}$$

est vraie.

• La fonction c_0 n'est pas nulle. Par conséquent, la famille (c_0) est libre et la proposition H_0 est vraie.

• Soit $m \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que la proposition H_m est vraie. La famille $(c_0,\dots,c_m)$ est donc libre. Nous allons montrer que la famille $(c_0,\dots,c_{m+1})$ l'est encore. Soient $u_0,\dots,u_{m+1} \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{m+1} u_k c_k = 0.$$

En dérivant la relation (1), puis en ajoutant $(m+1)^2(1)$, on obtient

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{m} u_k((m+1)^2 - k^2)\, c_k = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(c_0,\dots,c_m)$ est libre. On en déduit que, quel que soit $k \in \{0,\dots,m\}$, on a $u_k((m+1)^2 - k^2) = 0$ et donc $u_k = 0$.

Revenons à la relation (1). Il reste simplement $u_{m+1}c_{m+1} = 0$. On en déduit que $u_{m+1} = 0$, car la fonction c_{m+1} n'est pas nulle. Finalement, nous avons démontré que $u_0 = \cdots = u_{m+1} = 0$. Par conséquent, la famille $(c_0,\dots,c_{m+1})$ est libre et la proposition H_{m+1} est vraie.

• Finalement, nous avons montré que, quel que soit $m \in \{0,\dots,n\}$, la famille $(c_0,\dots,c_m)$ est libre. En particulier, la famille $(c_0,\dots,c_n)$ est libre.

2. Comme dans la première question, par définition d'une famille libre, nous devons montrer que, quel que soient $u_0,\dots,u_n \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\sum_{k=0}^{n} u_k e_k = 0,$$

on a $u_0 = \cdots = u_n = 0$.

Posons-nous la même question que précédemment : comment construire une nouvelle relation à partir de

$$\sum_{k=0}^{n} u_k e_k = 0\ ?$$

Nous pourrions procéder de la même manière que pour la famille $(c_0,\ldots,c_n)$ en dérivant (une seule fois). Nous allons proposer une autre méthode.

Nous disposons d'une information supplémentaire sur les éléments e_k : nous connaissons bien leur croissance à l'infini. Plus précisément, si $u_n \neq 0$, alors la fonction

$$\sum_{k=0}^{n} u_k e_k$$

est nécessairement équivalente à $u_n e_n$ au voisinage de $+\infty$. Si $u_n = 0$, mais $u_{n-1} \neq 0$, alors la fonction est équivalente à $u_{n-1}e_{n-1}$, *etc*. Cette observation nous montre comment procéder : si l'un des coefficients u_k n'est pas nul, nous pourrons donner un équivalent de la somme qui contredira sa nullité.

Soient $u_0,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{n} u_k e_k = 0.$$

Supposons, par l'absurde, que les coefficients u_k, avec $k \in \{0,\ldots,n\}$ ne sont pas tous nuls. Notons $l \in \{0,\ldots,n\}$ le plus grand indice tel que l'on ait $u_l \neq 0$. Alors, la fonction

$$\sum_{k=0}^{n} u_k e_k$$

est équivalente, au voisinage de $+\infty$, à la fonction $u_l e_l$. En particulier, cette fonction n'est pas nulle, car $u_l \neq 0$. On aboutit à une contradiction.

Nous venons de montrer que, quel que soit $k \in \{0,\ldots,n\}$, le coefficient u_k est nul. On en déduit que la famille $(e_0,\ldots,e_n)$ est libre.

13

Algèbre linéaire en dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'étude des espaces vectoriels de dimension finie est bien plus simple que celle des espaces vectoriels généraux. Cela tient, en particulier, au fait que certaines propriétés des espaces se testent simplement en comparant des dimensions. Dans certains cas bien précis, nous pourrons donc ramener l'étude de certaines propriétés peu évidentes (égalités d'espaces, sommes directes, *etc.*), à une comparaison de nombres entiers, bien plus élémentaire.

Rappelons, ici, quelques-unes de ces propriétés fort utiles. Nous fixons un corps $\mathbb{K}$, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de E composée de n vecteurs. Alors

$$(1) \quad \text{la famille } f \text{ est une base de } E \iff \text{la famille } f \text{ est libre}$$

et

$$(2) \quad \text{la famille } f \text{ est une base de } E \iff \text{la famille } f \text{ engendre } E.$$

Soient E_0 un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans E_0. Alors

$$(3) \quad \text{l'application } \varphi \text{ est un isomorphisme} \iff \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$$

et

$$(4) \quad \text{l'application } \varphi \text{ est un isomorphisme} \iff \mathrm{Im}(\varphi) = E_0.$$

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Alors

$$(5) \quad F = G \iff \dim(F) = \dim(G).$$

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Commençons par rappeler une implication bien utile :

$$(6) \quad F \oplus G = E \Longrightarrow \dim(F) + \dim(G) = n.$$

Réciproquement, supposons que $\dim(F) + \dim(G) = n$. Alors

$$(7) \quad F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0\}$$

et

$$(8) \quad F \oplus G = E \iff F + G = E.$$

Ces résultats propres à la dimension finie sont très importants et nous permettront de résoudre de nombreux exercices.

Exercice 13.1 : Images et noyaux II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer les équivalences suivantes

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f).$$

Cet exercice ressemble beaucoup à l'exercice **12.2**. Cependant, nous allons voir qu'en utilisant le fait que l'espace E est de dimension finie, on peut grandement simplifier les démonstrations.

Pour chaque implication que nous démontrons, nous commençons par utiliser des arguments identiques à ceux de l'exercice **12.2**. Ce n'est qu'à la fin qu'un argument de dimension nous permet de démontrer plus facilement que deux espaces sont égaux ou supplémentaires.

Nous démontrerons, dans l'ordre, les implications, $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 2$

L'une des deux inclusions est très simple.

> Supposons que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$. Montrons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y)$. Nous avons donc $x = f(f(y))$ et donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.

Ici, nous ne voyons pas comment utiliser un argument de dimension pour conclure. Nous ne disposons, en effet, d'aucune information sur la dimension de l'espace $\mathrm{Im}(f^2)$. Nous allons donc démontrer directement l'inclusion réciproque.

> Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Par hypothèse, $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$, donc il existe

$a \in \mathrm{Ker}(f)$ et $b \in \mathrm{Im}(f)$ tels que $y = a + b$. En outre, il existe $c \in E$ tel que $b = f(c)$. On en déduit que

$$x = f(a + f(c)) = f^2(c) \in \mathrm{Im}(f^2).$$

Finalement, on a bien $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

$2 \Longrightarrow 3$

Comme précédemment, l'une des deux inclusions est très simple.

Supposons que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Nous avons donc $f(x) = 0$. En composant par f, on obtient $f^2(x) = f(0) = 0$. On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).$$

Puisque nous disposons déjà d'une inclusion, d'après la propriété (5), pour conclure, il nous suffit de démontrer l'égalité des dimensions de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f)$. Par hypothèse, nous avons $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Nous allons pouvoir passer aux dimensions des noyaux en utilisant le théorème du rang.

En outre, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f^2)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f).$$

$3 \Longrightarrow 1$

Nous allons commencer par démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Supposons que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = f^2(y) = 0$. Par conséquent, $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $x = f(y) = 0$. Nous venons de démontrer que

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}.$$

D'après la propriété (7), pour obtenir l'égalité, il nous suffit de montrer que $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$. D'après le théorème du rang, cette propriété est toujours vérifiée.

Or, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E).$$

On en déduit que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

Exercice 13.2 : Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite $(\text{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\text{Im}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que la suite $(\text{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ stationne.

3. Notons

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall l \geqslant k, \text{Ker}(f^l) = \text{Ker}(f^k)\}.$$

Montrer que, quel que soit $l \geqslant p$, on a $\text{Im}(f^l) = \text{Im}(f^p)$.

4. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\dim(\text{Ker}(f^q)) = \dim(\text{Ker}(f^{q+1})).$$

Montrer que, quel que soit $l \geqslant q$, on a $\text{Ker}(f^l) = \text{Ker}(f^q)$. En déduire que $p \leqslant n$.

5. Montrer que $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$.

1. Pour montrer que la suite $(\text{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, il faut montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}).$$

Cela se démontre sans peine.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$. Soit $x \in \text{Ker}(f^k)$. Nous avons $f^k(x) = 0$. En appliquant f aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$f^{k+1}(x) = f(0) = 0.$$

On en déduit que $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Par conséquent, nous avons $\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$ et la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Le raisonnement pour les images n'est pas plus difficile que le précédent.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\operatorname{Im}(f^k) \supset \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Nous avons donc

$$y = f^k(f(x)).$$

On en déduit que $y \in \operatorname{Im}(f^k)$. Par conséquent, nous avons $\operatorname{Im}(f^k) \supset \operatorname{Im}(f^{k+1})$ et la suite $(\operatorname{Im}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Nous considérons ici une suite croissante d'espaces vectoriels de dimension finie. D'après la propriété (5), la suite stationne si, et seulement si, la suite des dimensions stationne. Or la suite des dimensions est majorée par $\dim(E) = n$. Cela nous suffira pour conclure.

• D'après la question précédente, la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. On en déduit que la suite $(\dim(\operatorname{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
• Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(f^k)$ est un sous-espace de E et donc $\dim(\operatorname{Ker}(f^k)) \leqslant n$. La suite $(\dim(\operatorname{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'entiers croissante et majorée. On en déduit qu'elle stationne :

$$\exists l \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant l, \dim(\operatorname{Ker}(f^k)) = \dim(\operatorname{Ker}(f^l)).$$

• Soit $k \geqslant l$. Nous avons $\operatorname{Ker}(f^k) \supset \operatorname{Ker}(f^l)$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f^k)) = \dim(\operatorname{Ker}(f^l))$. On en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^l).$$

Par conséquent, la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ stationne.

3. Soit $l \geqslant p$. Nous voulons montrer que $\operatorname{Im}(f^l) = \operatorname{Im}(f^p)$. D'après la première question, nous avons $\operatorname{Im}(f^l) \subset \operatorname{Im}(f^p)$. D'après la propriété (5), il nous suffit donc de montrer que $\dim(\operatorname{Im}(f^l)) = \dim(\operatorname{Im}(f^p))$. Par le théorème du rang, nous pouvons nous ramener à une égalité de dimensions de noyaux, ce que nous connaissons.

Soit $l \geqslant p$. Nous avons $\operatorname{Ker}(f^l) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Par conséquent, nous avons $\dim(\operatorname{Ker}(f^l)) = \dim(\operatorname{Ker}(f^p))$. En appliquant le théorème du rang, on en déduit que

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(f^l)) &= n - \dim(\mathrm{Ker}(f^l)) \\ &= n - \dim(\mathrm{Ker}(f^p)) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(f^p)).\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.**, nous avons $\mathrm{Im}(f^l) \subset \mathrm{Im}(f^p)$. On en déduit que

$$\mathrm{Im}(f^l) = \mathrm{Im}(f^p).$$

4. Par hypothèse, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^q)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^{q+1})).$$

D'après la question **1.**, nous avons également $\mathrm{Ker}(f^q) \subset \mathrm{Ker}(f^{q+1})$. En utilisant la propriété (5), on en déduit que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})$.

Nous voulons montrer que, quel que soit $l \geqslant q$, on a $\mathrm{Ker}(f^l) = \mathrm{Ker}(f^q)$. Il est naturel de chercher à démontrer cette égalité par récurrence.

Montrons, par récurrence, que, quel que soit $l \geqslant q + 1$, la proposition

$$H_l : « \mathrm{Ker}(f^l) = \mathrm{Ker}(f^q) »$$

est vraie.

• D'après la question **1.**, nous avons $\mathrm{Ker}(f^q) \subset \mathrm{Ker}(f^{q+1})$. Par hypothèse, ces espaces ont même dimension. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})$. La proposition H_{q+1} est donc vraie.

• Soit $l \geqslant q + 1$ tel que les propositions $H_{q+1}, \ldots, H_l$ sont vraies. Nous avons alors les égalités

$$\mathrm{Ker}(f^l) = \mathrm{Ker}(f^{l-1}) = \cdots = \mathrm{Ker}(f^q).$$

D'après la question **1.**, nous avons $\mathrm{Ker}(f^q) \subset \mathrm{Ker}(f^{l+1})$. Il nous reste à montrer l'inclusion réciproque.

Raisonnons par l'absurde. Si elle était fausse il existerait un élément x de E appartenant à $\mathrm{Ker}(f^{l+1})$, mais pas à $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^l)$. Nous aurions donc

$$f^{l+1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad f^l(x) \neq 0,$$

autrement dit

$$f^l(f(x)) = 0 \quad \text{et} \quad f^{l-1}(f(x)) \neq 0.$$

Ceci est absurde, car $\mathrm{Ker}(f^l) = \mathrm{Ker}(f^{l-1})(= \mathrm{Ker}(f^q))$, par hypothèse. Nous avons donc nécessairement l'égalité $\mathrm{Ker}(f^{l+1}) = \mathrm{Ker}(f^q)$ et la proposition H_{l+1} est vraie.

- Finalement, nous avons montré que, quel que soit $l \geqslant q$, on a $\mathrm{Ker}(f^l) = \mathrm{Ker}(f^q)$.

Nous souhaitons, à présent, montrer que $p \leqslant n$. D'après le résultat précédent, s'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^{l+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^l))$, alors la suite stationne à partir du rang l, autrement dit, $p \leqslant l$. Nous pouvons donc conclure dès qu'il existe $l \in \{0,\ldots,n\}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^{l+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^l))$.
Que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? La suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons alors nécessairement

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^0)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^1)) < \cdots < \dim(\mathrm{Ker}(f^n)).$$

Nous avons

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^0)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Id})) = \dim(\{0\}) = 0,$$

et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f^1)) > 0$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(f^1)) \geqslant 1$, puis $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) > 1$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(f^1)) \geqslant 2$, *etc.* En continuant ainsi, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(f^n)) \geqslant n$ et donc $\mathrm{Ker}(f^n) = E$. La suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons nécessairement $\mathrm{Ker}(f^k) = E$, quel que soit $k \geqslant n$. On en déduit que $p \leqslant n$.

- Supposons, tout d'abord, qu'il existe $l \in \{0,\ldots,n\}$ tel que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^{l+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^l)).$$

D'après le résultat précédent, nous avons alors $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^l)$, quel que soit $k \geqslant l$. En particulier, $p \leqslant l \leqslant n$.

- Dans le cas contraire, nous avons

$$0 = \dim(\mathrm{Ker}(f^0)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^1)) < \cdots < \dim(\mathrm{Ker}(f^n)).$$

On en déduit immédiatement que, quel que soit $l \in \mathbb{N}$, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^j)) \geqslant j.$$

En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}(f^n)) \geqslant n$ et donc $\mathrm{Ker}(f^n) = E$. La suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons nécessairement $\mathrm{Ker}(f^k) = E$, quel que soit $k \geqslant n$. On en déduit que $p \leqslant n$.

5. Nous souhaitons montrer que $\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E$. Un raisonnement sur les dimensions va nous permettre de nous ramener à une propriété plus simple à prouver. D'après le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme f^p, nous avons, en effet,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

D'après la propriété (7), il nous suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}.$$

• Montrons, tout d'abord, que les espaces $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont en somme directe. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f^p)$, il existe $y \in E$ tel que

$$x = f^p(y).$$

Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f^p)$, on a

$$f^p(x) = f^{2p}(y) = 0.$$

Par conséquent, $y \in \mathrm{Ker}(f^{2p})$. Or, par définition de p, on a

$$\mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p).$$

Nous avons donc $f^p(y) = x = 0$. Nous venons de démontrer que

$$\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}.$$

• D'après le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme f^p, nous avons, en outre,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) = E.$$

Exercice 13.3 : Indice de nilpotence

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. Nous supposerons que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^s = 0$. On appelle indice de nilpotence de f l'entier $r \in \mathbb{N}^*$ défini par

$$r = \min\{s \in \mathbb{N}^* \mid f^s = 0\}.$$

1. Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f^{r-1})$. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $r \leqslant n$.

1. Nous devons montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre. La façon de procéder dans ce genre de cas est classique : on considère une famille $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1})$ d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\lambda_0\, x + \cdots + \lambda_{r-1}\, f^{r-1}(x) = 0$$

et l'on cherche à montrer que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$.

Nous disposons, pour le moment, d'une seule relation : $\lambda_0\, x + \cdots + \lambda_{r-1}\, f^{r-1}(x) = 0$ et d'une seule hypothèse : $f^r = 0$. La seule façon d'utiliser l'hypothèse est visiblement d'appliquer l'endomorphisme f à la relation. On obtient

$$\lambda_0\, f(x) + \cdots + \lambda_{r-2}\, f^{r-1}(x) + \lambda_{r-1}\, f^r(x) = 0,$$

soit

$$\lambda_0\, f(x) + \cdots + \lambda_{r-2}\, f^{r-1}(x) = 0.$$

Nous sommes parvenus à faire disparaître l'un des coefficients et à obtenir une relation mettant en jeu uniquement $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-2}$. En appliquant f de façon répétée, nous pouvons faire disparaître, un à un, tous les coefficients jusqu'à obtenir une relation ne contenant que le coefficient λ_0. Nous pourrons alors en déduire que $\lambda_0 = 0$. La relation de départ s'écrira alors

$$\lambda_1\, f(x) + \cdots + \lambda_{r-1}\, f^{r-1}(x) = 0.$$

Nous pouvons alors reprendre le même raisonnement : en composant par f un nombre suffisant de fois, nous montrerons que $\lambda_0 = 0$, *etc*. Afin de rédiger cela proprement, nous allons mettre en œuvre une récurrence.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ vérifiant

$$(R) \quad \lambda_0\, x + \cdots + \lambda_{r-1}\, f^{r-1}(x) = 0.$$

Montrons par récurrence que, quel que soit $l \in \{0, \ldots, r-1\}$, la proposition

$$H_l : « \lambda_l = 0 »$$

est vraie.

- Quel que soit $s \geqslant r$, on a

$$f^s = f^{s-r} \circ f^r = 0.$$

Par conséquent, en appliquant l'endomorphisme f^{r-1} à la relation (R), on obtient

$$\lambda_0\, f^{r-1}(x) = 0.$$

Par hypothèse, $x \notin \operatorname{Ker}(f^{r-1})$, donc $f^{r-1}(x) \neq 0$. On en déduit que $\lambda_0 = 0$ et donc que la proposition H_0 est vraie.

• Soit $l \in \{0,\ldots,r-2\}$ tel que les propositions $H_0,\ldots,H_l$ sont vraies. Nous avons donc

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_l = 0.$$

La relation (R) se réécrit alors

$$\lambda_{l+1}\, f^{l+1}(x) + \cdots + \lambda_{r-1}\, f^{r-1}(x) = 0.$$

En appliquant f^{r-l-2}, on obtient

$$\lambda_{l+1}\, f^{r-1}(x) = 0,$$

d'où l'on tire $\lambda_{l+1} = 0$. Par conséquent, la proposition H_{l+1} est vraie.

• Finalement, nous avons montré que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$. On en déduit que la famille $(x, f(x),\ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

2. Nous voulons, à présent, démontrer que $r \leqslant n$. La façon de procéder est claire : l'énoncé nous a fait construire une famille libre à r éléments. Or dans un espace de de dimension n, toutes les familles libres possèdent moins de n éléments.

Il faut prêter attention à un point. L'énoncé commence par « Soit $x \in E \setminus \operatorname{Ker}(f^{r-1})$ », sans se préoccuper de l'existence d'un tel élément. Il se pourrait que l'ensemble $E \setminus \operatorname{Ker}(f^{r-1})$ soit vide. Notre premier souci doit donc consister à montrer qu'un tel élément x existe bien.

Par définition de l'indice de nilpotence r, on a $f^{r-1} \neq 0$. En particulier, $\operatorname{Ker}(f^{r-1}) \neq E$. Nous pouvons donc choisir un élément x dans $E \setminus \operatorname{Ker}(f^{r-1})$. Le raisonnement précédent assure alors que la famille $(x, f(x),\ldots, f^{r-1}(x))$ est libre. Par conséquent, elle comporte nécessairement moins d'éléments que la dimension de l'espace. On en déduit que $r \leqslant n$.

Nous pouvons retrouver l'inégalité $r \leqslant n$ en utilisant le résultat de l'exercice précédent. Quel que soit $s \geqslant r$, nous avons $f^s = 0$ et donc

$$\operatorname{Ker}(f^s) = E.$$

Par conséquent, la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et stationne à la valeur E. On en déduit que

$$\begin{aligned} p &= \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid \operatorname{Ker}(f^u) = E\} \\ &= \min\{u \in \mathbb{N}^* \mid f^u = 0\} \\ &= r. \end{aligned}$$

D'après la question **4.** de l'exercice précédent, nous avons

$$r = p \leqslant n.$$

Exercice 13.4 : Calcul explicite de rang

1. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = ((1,3,2),(2,5,2),(-2,-2,-1))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\mathcal{C} = ((2,0,1,-1),(1,1,2,1),(1,-1,-3,0),(0,1,-1,0),(2,1,-2,1)) .$$

Extraire de cette famille une famille libre de rang maximal.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-2y, 2x+4z, x+2y+2z) \end{array}.$$

Calculer le rang de l'endomorphisme f. Déterminer une base de son image et une base de son noyau.

1. Il existe une méthode classique pour calculer le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs : on considère la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et l'on se ramène à une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauβ, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes. Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est alors égal au nombres de lignes non nulles de la matrice obtenue.

D'après la propriété (2), nous savons qu'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base si, et seulement si, elle est de rang trois. Nous pouvons donc appliquer la méthode décrite ci-dessus.

Nous rappelons que les opérations élémentaires sur les lignes sont de trois sortes :

– $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$;

– $L_i \leftrightarrow L_j$;

– $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$.

Lorsque l'on applique la méthode du pivot de Gauβ, on n'utilise jamais la dernière opération.

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer le rang de cette matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

La matrice M est de rang 3. On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est également de rang 3. Puisqu'elle est composée de trois vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Appliquons la même méthode qu'à la question précédente.

Considérons la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer le rang de cette matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{1}{7}L_3 \end{matrix}$$

La matrice N est de rang 3. On en déduit que la famille $\mathcal{C}$ est de rang 3.

Nous devons, à présent, extraire de la famille $\mathcal{C}$ une famille libre de rang maximal, c'est-à-dire de rang 3. Cela revient à trouver une famille $\mathcal{C}'$ formée de trois vecteurs de $\mathcal{C}$ qui soit de rang 3. Nous pouvons en fait lire sur la matrice finale les vecteurs à choisir. En effet, il faut qu'en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice associée à $\mathcal{C}'$, on obtienne une matrice de rang 3. Si l'on garde les première, deuxième et quatrième colonne, ce sera visiblement le cas.

Considérons la famille

$$\mathcal{C}' = ((2,0,1,-1),(1,1,2,1),(0,1,-1,0)).$$

En effectuant sur la matrice associée à cette famille les mêmes opérations élémentaires que précédemment, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 3. Par conséquent, la famille $\mathcal{C}'$ est de rang 3. Comme elle est composée de trois vecteurs, cette famille est libre.

3. Rang

Le calcul du rang d'un morphisme se ramène au calcul du rang d'une matrice, problème que nous avons traité dans les questions précédentes. En effet, le rang d'un morphisme est le même que le rang de sa matrice exprimée dans n'importe quelles bases, au départ et à l'arrivée. Ici, nous utiliserons la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer le rang de cette matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

Dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser le coefficient en haut à gauche de la matrice comme pivot, puisque celui-ci est nul. Nous devons commencer par échanger deux lignes pour amener un coefficient non nul dans cette position.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} L_2 \longleftarrow \ L_2 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \longleftarrow \ L_3 - \tfrac{1}{2}L_2$$

Le rang de M est égal à 2. On en déduit que le rang de f vaut également 2.

Image

Une fois que nous avons réussi à transformer, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice M en une matrice triangulaire supérieure, il est facile de déterminer une base de l'image de f. Cela revient exactement à extraire une famille libre de rang maximal de la famille des colonnes de la matrice M. En effet, l'image de f est engendrée par les colonnes de cette matrice. Nous avons vu, à la question précédente, comment procéder.

En outre, la forme de la matrice obtenue nous montre que les premier et deuxième vecteurs colonnes de la matrice M engendrent l'image de la matrice. On en déduit que la famille $((0,2,1),(-2,0,2))$ est une base de l'image de f.

Noyau

Une fois que nous avons réussi à transformer, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice M en une matrice triangulaire supérieure, il est également facile de déterminer le noyau de f. Expliquons plus en détails. Un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de f si, et seulement si, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2y & = & 0 \\ 2x + 4z & = & 0 \\ x + 2y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous pouvons effectuer sur ce système les mêmes opérations que nous avons effectué sur la matrice et simplifier ainsi sa résolution. Les calculs sont exactement identiques et il est donc inutile de les refaire.

Un vecteur (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de f si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} -2y & = & 0 \\ 2x+4z & = & 0 \\ x+2y+2z & = & 0 \end{cases}$$

En effectuant exactement les mêmes opérations sur le système que sur la matrice, on montre que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x+2y+2z & = & 0 \\ -4y & = & 0\,, \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

et donc à

$$\begin{cases} x & = & -2z \\ y & = & 0 \end{cases}.$$

On en déduit que la famille $((2,0,-1))$ est une base du noyau de f.

Remarquons, pour finir, que nous avons trouvé une image de dimension 2 et un noyau de dimension 1. La somme des dimensions est 3, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$, en accord avec le théorème du rang.

Exercice 13.5 : Homothéties

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'une homothétie de E est une application linéaire de la forme

$$h_a : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & ax \end{array},$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit f un endomorphisme de E. Supposons que, quel que soit $x \in E$, il existe $a_x \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = a_x\, x.$$

a. Soient $x,y \in E$ deux vecteurs linéairement indépendants. Montrer que $a_x = a_y$. On pourra chercher à calculer $f(x+y)$ de deux façons différentes.

b. Montrer que f est une homothétie.

2. On appelle centre de $L(E)$ l'ensemble des éléments f de E vérifiant la condition suivante

$$\forall g \in L(E),\ f \circ g = g \circ f.$$

a. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un projecteur p_x de E dont l'image est égale à Vect(x).
b. Déterminer le centre de $L(E)$.

1.a. L'énoncé nous suggère de calculer de deux façons différentes la quantité $f(x+y)$. Puisque f est linéaire, nous avons $f(x+y) = f(x) + f(y)$. En utilisant l'hypothèse, on en déduit que

$$a_{x+y}\,(x+y) = a_x\,x + a_y\,y.$$

Il nous reste à utiliser la liberté de la famille (x,y) pour trouver une relation entre les coefficients a_x et a_y.

Par hypothèse, nous avons

$$f(x+y) = a_{x+y}\,(x+y) = a_{x+y}\,x + a_{x+y}\,y.$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ &= a_x\,x + a_y\,y. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$(a_x - a_{x+y})\,x + (a_y - a_{x+y})\,y = 0.$$

Puisque la famille (x,y) est libre, cette condition impose $a_x = a_{x+y}$ et $a_y = a_{x+y}$. On en déduit que

$$a_x = a_y.$$

1.b. L'expression « f est une homothétie » signifie

$$\exists a \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ f(x) = a\,x.$$

Nous disposons de l'hypothèse

$$\forall x \in E, \exists a_x \in \mathbb{K},\ f(x) = a_x\,x.$$

Sous cette forme, nous voyons que l'exercice consiste en fait à inverser les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Nous voulons trouver un élément a de $\mathbb{K}$ tel que, quel que soit $x \in E$, on ait $f(x) = a\,x$. Soit $x \in E$. Nous avons, par hypothèse, $f(x) = a_x\,x$. Nous

devons donc avoir $a\,x = a_x\,x$. Si le vecteur x n'est pas nul, cela impose que l'on ait

$$a = a_x.$$

Nous avons donc trouvé un candidat pour le scalaire a. Il nous reste à vérifier que, quel que soit $y \neq x$, on a encore

$$f(y) = a\,y = a_x\,y.$$

La question précédente nous suggère de distinguer deux cas selon que le vecteur y est linéairement dépendant du vecteur x ou non.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Par hypothèse, il existe $a_x \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = a_x\,x.$$

Soit $y \in E$. Montrons que l'on a encore

$$f(y) = a_x\,y.$$

Nous allons distinguer deux cas.

• La famille (x,y) est liée.

Puisque $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda x) \\ &= \lambda f(x) \\ &= \lambda a_x\,x \\ &= a_x\,y. \end{aligned}$$

• La famille (x,y) est libre.

D'après la question précédente, nous avons $a_x = a_y$ et donc

$$f(y) = a_y\,y = a_x\,y.$$

Finalement, nous avons montré que, quel que soit $y \in E$, on a

$$f(y) = a_x\,y.$$

Par conséquent, l'endomorphisme f est l'homothétie de rapport a_x.

2.a. Cette question est presque une question de cours. Rappelons qu'un projecteur est défini par la donnée de deux sous-espaces supplémentaires, l'image et la direc-

tion. Plus précisément, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et si p est la projection sur F le long de G, on a

$$p_{|F} = \text{Id et } p_{|G} = 0.$$

L'image de ce projecteur est F. Nous allons donc imposer la condition $F = \text{Vect}(x)$.

Soit G un supplémentaire de Vect(x) dans E. Considérons le projecteur p_x sur Vect(x) le long de G. Son image est alors Vect(x).

2.b. Nous devons déterminer le centre de $L(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres. Avant de commencer à raisonner, essayons de nous faire une idée en trouvant des éléments du centre. La question précédente nous donne une indication : considérer les homothéties. On se convainc facilement qu'elles appartiennent toutes au centre de $L(E)$. Rédigeons ce résultat.

Soit f une homothétie de E. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = h_a = a\,\text{Id}$. Quel que soit $g \in L(E)$ et quel que soit $x \in E$, nous avons alors

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(a\,x) \\ &= a\,g(x) \\ &= f(g(x)) \\ &= (f \circ g)(x). \end{aligned}$$

On en déduit que f appartient au centre de $L(E)$.

Nous allons montrer que les homothéties sont les seuls éléments du centre. Soit f un élément du centre de $L(E)$. D'après la question **1.b.**, pour montrer que f est une homothétie, il suffit de montrer que, quel que soit $x \in E$, il existe $a_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = a_x\,x$. Nous allons appliquer la question précédente pour essayer de démontrer cette propriété.

Soit f un élément du centre de $L(E)$. Soit $x \in E$. D'après la question **2.a.**, il existe un projecteur p_x de E dont l'image est égale à Vect(x). Puisque f appartient au centre de $L(E)$, nous avons

$$f \circ p_x = p_x \circ f.$$

En évaluant les deux membres de cette égalité en x, on obtient

$$f(p_x(x)) = p_x(f(x)).$$

On en déduit que

$$f(x) \in \text{Vect}(x),$$

car $p_x(x) = x$ et $\text{Im}(p_x) = \text{Vect}(x)$. Autrement dit, il existe $a_x \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = a_x\, x.$$

D'après la question **1.b.**, f est une homothétie.

Finalement, nous avons montré que le centre de $L(E)$ est exactement l'ensemble des homothéties de E.

Exercice 13.6 : Inégalités sur le rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$.

1. Démontrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leqslant n$.

2. Démontrer que $2\,\text{rg}(f^2) \leqslant \text{rg}(f)$. Pour cela, on pourra introduire la restriction de f à $\text{Im}(f)$ et déterminer son noyau et son image.

1. On dispose de formules faisant intervenir $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(f^2)$; plus précisément on sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\text{Ker}(f^2)) + \text{rg}(f^2) = n.$$

Pour obtenir une inégalité sur des dimensions, il suffit d'établir une inclusion entre des sous-espaces vectoriels.

Plus précisément, une relation de la forme $u \circ v = 0$, avec u et v linéaires, entraîne $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$. En effet, pour tout $x \in E$, on a $u(v(x)) = 0$, soit $v(x) \in \text{Ker}(u)$. Tous les éléments de l'image de v sont donc éléments du noyau de u.

Nous pouvons ici faire apparaître plusieurs composées nulles : $f^3 = 0$ peut s'écrire $f \circ f^2 = 0$ ou encore $f^2 \circ f = 0$ qui fournissent respectivement les inclusions $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

En passant aux dimensions, on obtient les inégalités

$$\text{rg}(f^2) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)) \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) \leqslant \dim(\text{Ker}(f^2)).$$

Comme $f^3 = 0$ on a

$$\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$$

et donc

$$\text{rg}(f^2) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)).$$

Etant donné que, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rg}(f)$$

il vient

$$\mathrm{rg}(f^2) \leqslant n - \mathrm{rg}(f)$$

soit

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leqslant n.$$

Nous aurions également pu utiliser l'inégalité $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$ mais, dans ce cas, nous aurions plutôt utilisé pour conclure le théorème du rang appliqué à f^2, *i.e.* la relation $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2) = n$.

2. Soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Par définition, g est l'application qui, à tout élément x de $\mathrm{Im}(f)$, associe $f(x)$.

g est linéaire comme restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel.

Avant d'appliquer le théorème du rang à g, déterminons ses noyau et image en fonction de f.

• L'image de g est l'ensemble des vecteurs de la forme $f(x)$ pour x appartenant à l'image de f, c'est-à-dire pour x de la forme $f(y)$ avec $y \in E$. Autrement dit, l'image de g est l'ensemble des vecteurs de la forme $f(f(y))$ avec $y \in E$: on a donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

• D'autre part, les éléments du noyau de g sont les éléments x de son espace de définition, à savoir $\mathrm{Im}(f)$, tels que $f(x) = 0$: ce sont donc les vecteurs qui appartiennent à la fois à $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$, autrement dit $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Le théorème du rang appliqué à g donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f)$$

soit, d'après la discussion précédente,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) + \mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f).$$

Pour aboutir à l'inégalité demandée, il suffit donc de démontrer que

$$\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

Cette inégalité est en particulier vérifiée si on a

$$\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f).$$

Il se trouve qu'on a bien cette inclusion, la vérification étant routinière.

Soit $x \in \operatorname{Im}(f^2)$. Par définition, il existe un élément y de E tel que $x = f^2(y)$.

D'une part, $f(x) = f(f^2(y)) = f^3(y) = 0$ car $f^3 = 0$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

D'autre part, $x = f(f(y))$ donc $x \in \operatorname{Im}(f)$ ($f(y)$ est en effet un antécédent de x par f).

Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout élément x de $\operatorname{Im}(f^2)$ on a donc

$$\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f).$$

Cette inclusion fournit l'égalité

$$\operatorname{rg}(f^2) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)).$$

Par ailleurs, le théorème du rang appliqué à g donne

$$\dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)) + \operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$$

d'où enfin l'inégalité demandée :

$$2\operatorname{rg}(f^2) \leqslant \operatorname{rg}(f).$$

Exercice 13.7 : Multilinéarité (MPSI)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et B une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det_B(x_1,\ldots,x_{i-1},f(x_i),x_{i+1},\ldots,x_n) \end{array}.$$

1. Montrer que l'application φ est une forme n-linéaire et alternée.

2. Montrer que, quel que soit $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, on a

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \operatorname{tr}(f)\det_B(x_1,\ldots,x_n).$$

1. Il s'agit ici d'une simple vérification. Rappelons qu'une application $g : E^n \to F$, où E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, est dite n-linéaire si elle est linéaire par

rapport à chacune de ses variables. Autrement dit, g est n-linéaire si, et seulement si, quel que soient $j \in \{1,\dots,n\}$, $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in E^{n-1}$, $x_j,y_j \in E$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} & g(x_1,\dots,x_{j-1},\lambda\, x_j + \mu\, y_j,x_{j+1},\dots,x_n) \\ = {} & \lambda\, g(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n) + \mu\, g(x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

Rappelons également qu'une forme n-linéaire sur E est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{R}$.

Soient $j \in \{1,\dots,n\}$, $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{n-1}$, $x_j,y_j \in \mathbb{R}^n$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Calculons $\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},\lambda\, x_j + \mu\, y_j,x_{j+1},\dots,x_n)$. Par définition de φ, cet élément s'obtient comme somme de n termes.
Soit $i \neq j$. Le terme a_i correspondant à l'indice i est un déterminant dont le j-ème facteur vaut $\lambda\, x_j + \mu\, y_j$. Par n-linéarité du déterminant, on peut développer par rapport à ce facteur et l'on obtient

$$\begin{aligned} a_i = {} & \lambda \det{}_B(x_1,\dots,f(x_i),\dots,x_j,\dots,x_n) \\ + {} & \mu \det{}_B(x_1,\dots,f(x_i),\dots,y_j,\dots,x_n). \end{aligned}$$

Considérons, à présent, le terme a_j correspondant à l'indice j. C'est un déterminant dont le j-ème facteur vaut $f(\lambda\, x_j + \mu\, y_j) = \lambda\, f(x_j) + \mu\, f(y_j)$, par linéarité de f. En développant le déterminant par rapport à ce facteur, on obtient

$$\begin{aligned} a_j = {} & \lambda \det{}_B(x_1,\dots,x_{j-1},f(x_j),x_{j+1},\dots,x_n) \\ + {} & \mu \det{}_B(x_1,\dots,x_{j-1},f(y_j),x_{j+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

En additionnant ces différents termes, on obtient

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},\lambda\, x_j + \mu\, y_j,x_{j+1},\dots,x_n) \\ = {} & \sum_{i \neq j}^{n} \lambda \det{}_B(x_1,\dots,f(x_i),\dots,x_j,\dots,x_n) \\ & +\lambda \det{}_B(x_1,\dots,f(x_j),\dots,x_n) \\ & + \sum_{i \neq j}^{n} \mu \det{}_B(x_1,\dots,f(x_i),\dots,y_j,\dots,x_n) \\ & +\mu \det{}_B(x_1,\dots,f(y_j),\dots,x_n) \\ = {} & \lambda\, \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n) \\ & +\mu\, \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application φ est une forme n-linéaire.

Il nous reste, à présent, à montrer que l'application φ est alternée. Rappelons qu'une application n-linéaire $g : E^n \to F$, où E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, est dite alternée si $g(x_1,\ldots,x_n) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.

Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, avec $i \neq j$, tels que $x_i = x_j$. Calculons $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Il s'écrit comme une somme de n termes.

Soit $k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i, j\}$. Le terme a_k d'indice k de la somme est un déterminant dont le i-ème facteur x_i est égal au j-ème facteur x_j. Par conséquent, on a $a_k = 0$.
Le terme a_i d'indice i de la somme vaut $\det_B(x_1,\ldots,f(x_i),\ldots,x_j,\ldots,x_n)$.
Le terme a_j d'indice j de la somme vaut

$$\begin{aligned} & \det_B(x_1,\ldots,x_i,\ldots,f(x_j),\ldots,x_n) \\ = & \det_B(x_1,\ldots,x_i,\ldots,f(x_i),\ldots,x_n) \\ = & -\det_B(x_1,\ldots,f(x_i),\ldots,x_j,\ldots,x_n) \\ = & -a_i. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_i + a_j = 0.$$

Par conséquent, l'application φ est alternée.

2. Pour résoudre cette deuxième question, il faut se souvenir d'un résultat important du cours sur les applications multilinéaires et le déterminant : si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, l'espace vectoriel des formes n-linéaires et alternées est de dimension 1 et engendré par le déterminant.

Par conséquent, le résultat de la question précédente nous montre que l'application φ est un multiple du déterminant : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \det$. Pour déterminer le coefficient de multiplicité λ, il nous suffit d'appliquer cette formule avec un n-uplet de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ bien choisi.

L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ est de dimension 1 et engendré par le déterminant. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(S) \quad \varphi = \lambda \det_B.$$

Notons $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Calculons $\varphi(e_1,\ldots,e_n)$. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Calculons, tout d'abord, le nombre réel $\det(e_1,\ldots,f(e_i),\ldots,e_n)$. Écrivons le vecteur $f(e_i)$ sous la forme

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, e_j$, avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, quel que soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. Grâce aux propriétés du déterminant, on a

$$\begin{aligned}
\det_B(e_1,\ldots,f(e_i),\ldots,e_n) &= \det_B\left(e_1,\ldots,e_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, e_j, e_{i+1},\ldots,e_n\right) \\
&= a_{i,i} \det_B(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n) \\
&= a_{i,i}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\varphi(e_1,\ldots,e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{tr}(f).$$

En reportant dans la formule (S), on obtient

$$\mathrm{tr}(f) = \lambda \det_B(e_1,\ldots,e_n) = \lambda.$$

On en déduit finalement que

$$\varphi = \mathrm{tr}(f) \det_B.$$

14 Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 14.1 : Matrices d'ordre 2

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $A^2 - \text{tr}(A)\, A + \det(A)\, I_2 = 0$.

2. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Calculer A^{-1}.

3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Il s'agit ici d'un simple calcul. Nous allons l'effectuer sans plus de commentaires.

Il existe $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons également $\mathrm{tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$. On en déduit que

$$\begin{aligned} & A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \det(A)\, \mathrm{I}_2 \\ = & \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a+d)a + ad - bc & ab + bd - (a+d)b \\ ac + cd - (a+d)c & bc + d^2 - (a+d)d + ad - bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Nous cherchons, à présent, à calculer l'inverse de la matrice A. Comment utiliser la formule trouvée précédemment ? Souvenons-nous que l'inverse de la matrice A est, par définition, l'unique matrice B vérifiant $AB = BA = \mathrm{I}$. Nous allons donc chercher à faire apparaître une relation du type $AB = \mathrm{I}$ en modifiant la formule dont nous disposons.

D'après la question précédente, on a $A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \det(A)\, \mathrm{I}_2 = 0$, autrement dit $A\,(A - \mathrm{tr}(A)\, \mathrm{I}_2) = -\det(A)\, \mathrm{I}_2$. Puisque $\det(A) \neq 0$, cette formule peut encore s'écrire

$$A\, ((\det(A))^{-1}\, (\mathrm{tr}(A)\, \mathrm{I}_2 - A)) = \mathrm{I}_2.$$

On en déduit que

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1}\, (\mathrm{tr}(A)\, \mathrm{I}_2 - A).$$

Si la matrice A s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Il faut remarquer ici que nous avons trouvé une matrice B vérifiant $AB = \mathrm{I}_2$. Pour que la matrice B soit l'inverse de la matrice A, il faut, *a priori*, vérifier également que l'on a bien $BA = \mathrm{I}_2$. Nous nous sommes dispensés de ce calcul, car le résultat est automatique pour les matrices : un inverse à droite est nécessairement un inverse à gauche, et réciproquement.

3. Il existe une méthode classique pour calculer les puissances d'une matrice M lorsque l'on en connaît un polynôme annulateur $P(X)$. Notons d son degré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer M^n revient à appliquer le polynôme X^n à la matrice M. Pour effectuer ce calcul, nous pouvons profiter de la relation $P(M) = 0$. En effet, effectuons la division euclidienne de X^n par $P(X)$: il existe $Q(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$, avec R de degré strictement inférieur à d, vérifiant $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$. Pour la matrice M, cela signifie que l'on a

$$M^n = P(M)Q(M) + R(M) = R(M).$$

Puisque $R(X)$ est de degré strictement inférieur à d, on voit qu'il suffit de calculer les puissances $A^2, \dots, A^{d-1}$ pour les avoir toutes. Appliquons, à présent, cette méthode à la matrice A.

On a $\operatorname{tr}(A) = 1$ et $\det(A) = -2$. D'après la première question, le polynôme $X^2 - X - 2$ annule donc la matrice A.

Soit $n \geqslant 2$. Effectuons la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$: il existe $Q(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$, avec R de degré strictement inférieur à 2, vérifiant

$$(1) \quad X^n = (X^2 - X - 2)Q(X) + R(X).$$

Calculons $R(X)$. Il existe $a,b \in \mathbb{K}$ tels que $R(X) = a_n X + b_n$. Les racines du polynôme $Q(X)$ sont -1 et 2. Spécialisons la relation (1) en $X = -1$: on obtient $(-1)^n = -a_n + b_n$. De même, en spécialisant en $X = 2$, on obtient $2^n = 2a_n + b_n$. On en déduit que

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \\ b_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{cases}$$

Or, toujours d'après la relation (1), nous avons

$$A^n = (A^2 - A - 2\,\mathrm{I}_2)Q(A) + R(A) = R(A) = a_n\,A + b_n\,\mathrm{I}_2.$$

Tous calculs faits, nous obtenons

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - (-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^{n+1} + 2(-1)^n & -2^n + 4(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.2 : Matrices unipotentes (sauf PTSI)

Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente : il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0$.

1. Montrer que la matrice $\mathrm{I}_n + N$ est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer $(\mathrm{I}_n + N)^p$, pour $p \in \mathbb{N}$.

3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} et A^p, pour $p \in \mathbb{N}$.

1. Rappelons que, si R est un anneau et a,b deux éléments de R **qui commutent**, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=0}^{k} a^i\, b^{k-i}.$$

Nous pouvons, par exemple, utiliser cette formule dans l'anneau $(M_n(\mathbb{R}),+,\times)$ avec $a = \mathrm{I}_n$ et $b = N$. On obtient

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^r - N^r = (\mathrm{I}_n - N) \sum_{i=0}^{r-1} N^i.$$

Cette remarque permet de trouver directement l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_n + N$. Signalons que cette méthode est classique et qu'il est bon de la retenir.

La matrice

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, N^i$$

est l'inverse de la matrice $\mathrm{I}_n + N$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, N^i\right)(\mathrm{I}_n + N) &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, N^i + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, N^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i\, N^i + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1}\, N^i \\
&= \mathrm{I}_n + (-1)^{r-1}\, N^r \\
&= \mathrm{I}_n,
\end{aligned}$$

car $\mathrm{I}_n N = N \mathrm{I}_n$.

2. Nous voulons ici calculer les puissances d'une somme de deux matrices. Puisque ces matrices commutent, nous pouvons utiliser la formule du binôme de Newton.

Remarquons que les matrices I_n et N commutent. Par conséquent, nous pouvons utiliser la formule du binôme de Newton : quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_n + N)^p &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} N^i \\
&= \sum_{i=0}^{\min(p,r-1)} \binom{p}{i} N^i,
\end{aligned}$$

car, quel que soit $q \geqslant r$, on a $N^q = 0$.

3. Nous devons ici appliquer les résultats théoriques obtenues aux deux questions précédentes au cas particulier de la matrice A. Bien entendu, il faut commencer par s'assurer que la matrice A est bien du type considéré précédemment.

La matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. En effet, on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer les résultats précédents à la matrice $A = \mathrm{I}_n + N$. On en déduit que la matrice A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \mathrm{I}_n - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit également que, quel que soit $p \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} A^p &= \sum_{i=0}^{2} \binom{p}{i} N^i \\ &= \mathrm{I}_n + p\,N + \frac{p(p-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p & p^2+2p \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14.3 : Calcul de puissances (sauf PTSI)

1. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^p, pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice carrée de taille n définie par

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\},\ b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j\,; \\ 1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Calculer B^p, pour $p \in \mathbb{N}$.

3. Calculer B^{-1}.

1. Pour traiter ce genre d'exercices, il est bon de commencer par calculer les premières puissances. On essaie ensuite de deviner une formule, puis de la démontrer par récurrence. Dans notre cas, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n\,A,$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} n^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ n^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix} = n^2\,A.$$

Il est naturel de chercher à démontrer que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a $A^p = n^{p-1}\,A$.

Montrons par récurrence que, quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a $A^p = n^{p-1}\,A$. L'initialisation pour $p = 1$ est évidente.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = n^{p-1}\,A$. Alors

$$A^{p+1} = A^p\,A = n^{p-1}\,A^2 = n^{p-1}\,n\,A = n^p\,A.$$

Nous avons montré que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a $A^p = n^{p-1}\,A$.

2. Remarquons que l'on a $B = \mathrm{I}_n + A$. Nous devons donc calculer les puissances d'une somme de deux matrices. Lorsque les deux matrices en question commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : si R et S sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(R+S)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} R^i\,S^{p-i}.$$

Cette formule n'est pas valable si les matrices ne commutent pas. Considérons, par exemple, les matrices

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$(R+S)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais

$$R^2 + 2RS + S^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on a $B = \mathrm{I}_n + A$ et que les matrices I_n et A commutent. Nous pouvons donc appliquer la formule du binôme de Newton : quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$B^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i = \mathrm{I}_n + \left(\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} \right) A.$$

Il nous reste à calculer la somme $\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1}$. Elle ressemble aux sommes que l'on obtient par la formule du binôme de Newton. Il y a cependant trois différences : les exposants qui interviennent sont du type $i-1$ au lieu de i, la somme n'est pas complète, puisqu'elle commence à 1 au lieu de 0, et des puissances d'un seul élément, au lieu de deux, interviennent. Pour modifier les exposants, il suffit de multiplier et diviser la somme par n :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} &= \frac{1}{n} n \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i}. \end{aligned}$$

Pour rendre la somme complète, il suffit d'ajouter et soustraire le terme manquant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i} + \binom{n}{0} n^0 - \binom{n}{0} n^0 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} n^{i} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pour faire apparaître un deuxième élément dont on prend les puissances, il suffit de rajouter des 1^{p-i} :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}n^i-1\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}n^i\,1^{p-i}-1\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left((n+1)^p-1\right).$$

Il n'est pas utile de préciser autant le calcul dans la rédaction.

Calculons encore

$$\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}n^{i-1}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}n^i-1\right)=\frac{(n+1)^p-1}{n}.$$

On en déduit que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$B^p = \mathrm{I}_n + \frac{(n+1)^p-1}{n}A.$$

3. Pour conserver la symétrie du problème, il est raisonnable de chercher un inverse ayant une forme semblable à celle de la matrice B : les coefficients de la diagonale sont tous identiques et les coefficients hors de la diagonale sont tous identiques. Autrement dit, nous allons chercher un inverse sous la forme $a\,\mathrm{I}_n + b\,A$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

Quelles conditions faut-il imposer sur a et b ? On a

$$\begin{aligned} B\,(a\,\mathrm{I}_n + b\,A) &= (\mathrm{I}_n + A)\,(a\,\mathrm{I}_n + b\,A) \\ &= a\,\mathrm{I}_n + (a+b)\,A + b\,A^2 \\ &= a\,\mathrm{I}_n + (a+(n+1)b)\,A \end{aligned}$$

La matrice $a\,\mathrm{I}_n + b\,A$ sera l'inverse de A si l'on impose $a = 1$ et $a+(n+1)b = 0$, autrement dit, $b = -1/(n+1)$.

Vérifions que la matrice

$$C = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n+1}A$$

est l'inverse de la matrice B. On a

$$\begin{aligned} B\,C &= (\mathrm{I}_n + A)\,(\mathrm{I}_n - \frac{1}{n+1}A) \\ &= \mathrm{I}_n + \frac{n}{n+1}A - \frac{1}{n+1}A^2 \\ &= \mathrm{I}_n, \end{aligned}$$

car $A^2 = n\,A$.

Exercice 14.4 : Calcul explicite d'inverse

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Cet exercice se résout classiquement en utilisant la méthode du pivot de Gauβ. On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A de façon à la transformer en une matrice triangulaire supérieure. La matrice est alors diagonalisable si, et seulement si, aucun des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire n'est nul.
Pour calculer l'inverse, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice triangulaire de façon à la transformer en la matrice I_3. Si l'on effectue sur la matrice I_3 les opérations qui nous ont permis de passer de A à I_3, on aboutit à la matrice A^{-1}.
Dans la présentation que nous adoptons, nous effectuons les opérations sur la matrice I_3 en même temps que nous les effectuons sur la matrice A.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 17 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{17}{5} L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{17}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

À ce stade du raisonnement, nous pouvons affirmer que la matrice A est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \longleftarrow 5L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -3 & -17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{2}{5} L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -17 & 5 \\ 1 & 7 & -2 \\ -3 & -17 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 + 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ -3 & -17 & 5 \end{pmatrix}$$

On déduit des calculs précédents que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ -3 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.5 : Une matrice inversible

Soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Soient $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En écrivant la matrice A comme somme d'une matrice de rang 1 et d'une matrice diagonale, calculer la quantité $\mathrm{tr}({}^tXAX)$.

2. En déduire que la matrice A est inversible.

1. L'énoncé nous suggère d'écrire la matrice A comme somme d'une matrice de rang 1 et d'une matrice diagonale. Une décomposition s'impose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à calculer la quantité demandée en nous servant de cette décomposition.

Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} = R + D.$$

Par linéarité de la trace, nous avons

$$\mathrm{tr}({}^tXAX) = \mathrm{tr}({}^tXRX) + \mathrm{tr}({}^tXDX).$$

Calculons séparément ces deux termes.
Nous avons

$$RX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix}$$

et donc

$${}^tXRX = (\,x_1 \quad \dots \quad x_n\,) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix} = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right).$$

D'autre part, nous avons

$$DX = \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix}$$

et donc

$${}^tXDX = (\,x_1 \quad \dots \quad x_n\,) \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^2 \right).$$

Finalement, on obtient

$$\mathrm{tr}({}^tXAX) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^2.$$

L'utilisation de la trace dans la dernière étape peut paraître étrange, puisque nous l'appliquons à une matrice carrée de taille 1 et ne contenant donc qu'un seul coefficient. Elle permet en fait de passer d'un objet qui est un élément de $M_{1,1}(\mathbb{R})$ à un objet, sa trace, qui est véritablement un élément de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la matrice A est inversible. Comme d'habitude, nous allons montrer que le noyau de l'application linéaire canoniquement associée est réduit à $\{0\}$. En nous aidant du calcul précédent, cela ne devrait pas poser de problèmes.

Notons a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \text{Ker}(a)$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Nous avons alors $AX = 0$. D'après le résultat de la question précédente, nous avons donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^2 = \text{tr}({}^t XAX) = 0.$$

Or, quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a_i \geqslant 0$. Nous avons donc une somme de termes positifs dont la somme est nulle. On en déduit que chacun de ces termes doit être nul :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = a_1\, x_1^2 = \cdots = a_n\, x_n^2 = 0.$$

Quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a_i \neq 0$. Cela impose que $x_1 = \cdots = x_n = 0$ et donc que $x = 0$. On en déduit que $\text{Ker}(a) = \{0\}$. Par conséquent, l'endomorphisme a est un isomorphisme et sa matrice A dans la base canonique est inversible.

Exercice 14.6 : Réduction d'un endomorphisme

1. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $f \circ g = 0$ si, et seulement si, $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

2. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = 0$.

a. En utilisant la question précédente, calculer la dimension du noyau et de l'image de f.

b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pensera à chercher une base adaptée à toutes les inclusions rencontrées dans l'exercice.

1. Cette première question est très classique et il faut savoir la rédiger correctement et rapidement.

Supposons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in E$. L'élément $g(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, on a $f(g(x)) = 0$.

Supposons, à présent, que $f \circ g = 0$. Soit $x \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Puisque $f \circ g = 0$, on a $f(x) = f(g(y)) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

2.a. Dans cette question, nous devons calculer les dimensions du noyau et de l'image de l'endomorphisme f. Nous allons commencer par écrire toutes les informations que nous avons concernant ces dimensions. Tout d'abord f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant 3 \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3.$$

En outre, l'endomorphisme f n'est pas nul, autrement dit, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) < 3$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) > 0$. Nous pouvons donc être plus précis :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{0,1,2\} \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1,2,3\}.$$

Appliquons le théorème du rang. On obtient

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

L'énoncé nous suggère d'utiliser la question précédente. En l'appliquant avec $g = f$, on obtient $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Une fois ces informations regroupées, il ne nous reste qu'une possibilité : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3.$$

D'après la question précédente, appliquée avec $g = f$, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Il ne nous reste que deux possibilités : soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. La première possibilité est exclue car elle correspond à l'endomorphisme nul. Nous obtenons finalement

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2.$$

b. Nous avons la suite d'inclusions $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ entre des espaces de dimension 1, puis 2, puis 3. Il est naturel de chercher une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à ces inclusions. Dans un premier temps, choisissons une base (e_1) de $\mathrm{Im}(f)$. Elle n'est composée que d'un vecteur car nous avons vu à la question précédente que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

À présent, complétons la famille (e_1) en une base (e_1,e_2) de $\mathrm{Ker}(f)$. Elle est composée de deux vecteurs car $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, d'après la question précédente. Finalement, complétons la famille (e_1,e_2) en une base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Calculons la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$. On a $f(e_1) = f(e_2) = 0$, car $e_1,e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Le vecteur $f(e_3)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ est n'est pas nul car $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. On en déduit qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $f(e_3) = \lambda\, e_1$.

Par conséquent, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous avons presque obtenu la matrice voulue. Posons $e'_3 = (1/\lambda)\, e_3$. Nous avons alors $f(e'_3) = e_1$. Définissons une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{B}' = (e_1,e_2,e'_3)$. La matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que nous aurions pu choisir directement le vecteur e'_3 comme un antécédent de e_1 par f. Cette observation nous permettra de rendre la rédaction un peu plus élégante.

Nous avons la suite d'inclusions $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$. D'après la question précédente, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Soit (e_1) une base de $\mathrm{Im}(f)$ et complétons-la en une base (e_1,e_2) de $\mathrm{Ker}(f)$. Il existe un vecteur e_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = e_1$. Puisque $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$, la famille (e_1,e_2,e_3) est libre. On en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de l'endomorphisme f dans cette base n'est autre que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.7 : Projections et symétries

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$b_1 = (1,1,2),\ b_2 = (-2,-1,3) \text{ et } b_3 = (0,-3,-1).$$

Notons

$$E = \text{Vect}(b_1,b_2) \text{ et } F = \text{Vect}(b_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (b_1,b_2,b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces E et F ?

b. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Calculer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$.

c. Notons $\mathcal{E} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice N de p dans la base $\mathcal{E}$.

d. Calculer la matrice P de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$. Quelle relation existe-t-il entre les matrices M, N et P ?

2. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$c_1 = (1,-1,-3),\ c_2 = (1,0,3) \text{ et } c_3 = (2,-1,1).$$

Notons

$$G = \text{Vect}(c_1) \text{ et } H = \text{Vect}(c_2,c_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (c_1,c_2,c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces G et H ?

b. Soit s la symétrie par rapport à G parallèlement à H. Calculer la matrice S de s dans la base $\mathcal{C}$.

c. Calculer la matrice Q de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ et son inverse.

d. En utilisant la question précédente, calculer la matrice T de s dans la base $\mathcal{E}$.

Cette exercice a pour seul objet de faire revoir les définitions de base du cours et de les appliquer. Nous aurons besoin de savoir montrer qu'une famille est une base, de connaître la définition d'une projection et d'une symétrie, de calculer la matrice d'un endomorphisme dans une base et d'effectuer un changement de base.

1.a. Pour montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, nous allons appliquer la méthode du pivot de Gauβ sur la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Nous allons effectuer des opérations sur les lignes de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 7L_2$$

On déduit des calculs précédents que la matrice est inversible. Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque les espaces E et F sont obtenus en prenant les espaces vectoriels engendrés par deux parties complémentaires d'une base de $\mathbb{R}^3$, ils sont nécessairement supplémentaires.

1.b. Ici, il s'agit simplement d'appliquer les définitions.

Par définition, on a $p_{|E} = \mathrm{Id}$ et $p_{|F} = 0$. Par conséquent, on a $p(b_1) = b_1$, $p(b_2) = b_2$ et $p(b_3) = 0$. On en déduit que la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.c. Nous devons calculer la matrice de p dans la base $\mathcal{E}$. Pour cela, il nous faut écrire les vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ces calculs doivent s'effectuer au brouillon : pour la rédaction finale, seul le résultat importe.

Calculons l'expression de e_1 dans la base $\mathcal{B}$. Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on obtient

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - 3z = -1 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 7y - z = -2 & L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - 3z = -1 \\ 20z = 5 & L_3 \longleftarrow L_3 - 7L_2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

et donc que

$$e_1 = \frac{1}{2}\, b_1 - \frac{1}{4}\, b_2 + \frac{1}{4}\, b_3.$$

On montre de même que

$$e_2 = -\frac{1}{10}\, b_1 - \frac{1}{20}\, b_2 - \frac{7}{20}\, b_3$$

et que

$$e_3 = \frac{3}{10}\, b_1 + \frac{3}{20}\, b_2 + \frac{1}{20}\, b_3.$$

Un calcul nous montre que

$$\begin{cases} e_1 &= \quad \frac{1}{2}\, b_1 - \frac{1}{4}\, b_2 + \frac{1}{4}\, b_3 \\ e_2 &= -\frac{1}{10}\, b_1 - \frac{1}{20}\, b_2 - \frac{7}{20}\, b_3 \\ e_3 &= \quad \frac{3}{10}\, b_1 + \frac{3}{20}\, b_2 + \frac{1}{20}\, b_3 \end{cases}$$

Puisque nous savons que $p(b_1) = b_1$, que $p(b_2) = b_2$ et que $p(b_3) = 0$, nous pouvons calculer les expressions de $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il ne nous restera plus, ensuite, qu'à revenir aux expressions des vecteurs dans la base $\mathcal{E}$. Puisque les vecteurs b_1, b_2 et b_3 sont justement définis par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{E}$, il s'agira d'un simple calcul.

On en déduit que nous avons

$$\begin{cases} p(e_1) &= \quad \frac{1}{2}\, b_1 - \frac{1}{4}\, b_2 &= \quad e_1 + \frac{3}{4}\, e_2 + \frac{1}{4}\, e_3 \\ p(e_2) &= -\frac{1}{10}\, b_1 - \frac{1}{20}\, b_2 &= -\frac{1}{20}\, e_2 - \frac{7}{20}\, e_3 \\ p(e_3) &= \quad \frac{3}{10}\, b_1 + \frac{3}{20}\, b_2 &= \quad \frac{3}{20}\, e_2 + \frac{21}{20}\, e_3 \end{cases}.$$

La matrice de p dans la base $\mathcal{E}$ est donc

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{20} & \frac{21}{20} \end{pmatrix}.$$

1.d. Dans cette dernière partie, il s'agit, là encore, d'appliquer le cours. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$ est, par définition, la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{E}$. Rappelons que c'est également la matrice de l'application identité de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{E}$.

En outre, si P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, M la matrice de p dans $\mathcal{B}$ et N la matrice de p dans $\mathcal{E}$, nous avons la relation

$$M = P^{-1}NP.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

La formule de changement de base nous montre que l'on a la formule

$$M = P^{-1}NP.$$

Pour finir, nous pouvons remarquer que l'on connaît la matrice P^{-1}. En effet, c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$, autrement dit, celle dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{E}$ exprimés dans $\mathcal{B}$. Nous avons effectué ce calcul à la question **1.c.** et avons trouvé

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

2. Cet exercice est proche du précédent : on nous donne une application linéaire qui a une expression très simple dans une base donnée et on nous demande de trouver son expression dans une autre base. Cependant, la méthode utilisée est différente. Dans l'exercice précédent, nous raisonnions sur les vecteurs de la base. Cette fois-ci, nous travaillerons avec la matrice de changement de base.

2.a. On procède ici comme à la question **1.a.**

Nous allons effectuer des opérations sur les lignes de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 6L_2$$

On déduit des calculs précédents que la matrice est inversible. Par conséquent, la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puisque les espaces G et H sont obtenus en prenant les espaces vectoriels engendrés par deux parties complémentaires d'une base de $\mathbb{R}^3$, ils sont nécessairement supplémentaires.

2.b. Pour répondre à cette question, il suffit de se rappeler la définition d'une symétrie.

Par définition, on a $s_{|G} = \mathrm{Id}$ et $s_{|H} = -\mathrm{Id}$. Par conséquent, on a $s(c_1) = c_1$, $s(c_2) = -c_2$ et $s(c_3) = -c_3$. On en déduit que la matrice de s dans la base $\mathcal{C}$ est

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.c. Dans cette question, il faut se souvenir de la définition d'une matrice de passage et du procédé pour calculer l'inverse d'une matrice.

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons son inverse par la méthode du pivot de Gauß.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 6L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 12 & -2 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit des calculs ci-dessus que l'inverse de la matrice est la matrice

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.d. Cette dernière question repose sur la formule de changement de base.

D'après la formule de changement de base, la matrice de l'application s dans la base $\mathcal{E}$ est

$$T = QSQ^{-1}.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 \\ -6 & -11 & 2 \\ -18 & -30 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14.8 : Suites couplées

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites à termes réels définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4\,u_n - 2\,v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$X_{n+1} = A\,X_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_n en fonction des puissances de A et de X_0.

2. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. Calculer une base des espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$. En déduire une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de D^n. En déduire l'expression de u_n et v_n.

1. La première partie de la question est facile. On nous demande simplement de réécrire sous forme matricielle le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4\,u_n - 2\,v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

en faisant intervenir les vecteurs

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A\,X_n &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\,u_n - 2\,v_n \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde partie de la question, commençons, pour nous faire une idée, par résoudre le problème pour les premières valeurs de n. Nous allons calculer X_n en ne faisant intervenir que A et X_0. Tout d'abord, on a $X_0 = X_0$. Ensuite, le raisonnement précédent nous montre que l'on a $X_1 = A\,X_0$. Calculons encore

$$X_2 = A\,X_1 = A\,(A\,X_0) = A^2\,X_0$$

et

$$X_3 = A\,X_2 = A\,(A^2\,X_0) = A^3\,X_0.$$

En continuant ainsi, on montre que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X_n = A^n\,X_0.$$

Cela se démontre proprement à l'aide d'une récurrence.

Montrons par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X_n = A^n\,X_0.$$

L'initialisation est évidente : on a

$$A^0\,X_0 = \mathrm{I}_2\,X_0 = X_0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n\,X_0$. D'après le raisonnement précédent, on a

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A\,X_n \\ &= A\,(A^n\,X_0) \\ &= A^{n+1}\,X_0. \end{aligned}$$

2. L'exercice débute par des calculs.

On a

$$A - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} 2x & - & 2y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{cases}$$

autrement dit,

$$y = x.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

et que la famille $(a = (1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
On a

$$f - 3\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$ si, et seulement si, on a

$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 0 \\ x & - & 2y & = & 0 \end{cases}$$

autrement dit,

$$x = 2y.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \{(2y,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

et que la famille $(b = (2,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$.

Nous devons déduire des résultats précédents une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $P^{-1}AP = D$. Nous reconnaissons ici la formule de changement de base. Détaillons un peu. Notons c_1 et c_2 les colonnes de P et $\mathcal{B}$ la base (c_1,c_2) de $\mathbb{R}^2$ (cette famille est une base car la matrice P est inversible).

La formule $P^{-1}AP = D$ signifie exactement que la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$ est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Autrement dit, on a

$$f(c_1) = 2\,c_1 + 0\,c_2 = 2\,c_1$$

et

$$f(c_2) = 0\,c_1 + 3\,c_2 = 3\,c_2.$$

Nous pouvons retraduire ces deux dernières égalité sous la forme

$$c_1 \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$$

et

$$c_2 \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}).$$

Nous en déduisons des candidats potentiels pour accomplir le rôle de c_1 et c_2 : ce sont respectivement a et b.

La famille $\mathcal{B} = (a,b)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car les vecteurs a et b ne sont pas colinéaires. Puisque $a \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et que $b \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})$, on a

$$f(a) = 2a \text{ et } f(b) = 3b.$$

On en déduit que la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$ la matrice de changement de base de la base canonique à $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la formule du changement de base, on a alors

$$P^{-1}AP = D.$$

3. Nous devons exprimer A^n en fonction de D^n. Commençons par nous faire une idée en étudiant le problème pour les premières valeurs de n. Pour $n = 1$, nous avons $D = P^{-1}AP$. En la multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, on trouve

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A.$$

Calculons, à présent, A^2 grâce à cette formule. On a

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Nous pourrions être tentés d'écrire $(PDP^{-1})^2 = P^2D^2P^{-2}$, mais cette formule est, en général, fausse. Nous devons revenir à la définition de l'élévation au carré : pour toute matrice $R \in M_2(\mathbb{R})$, nous avons $R^2 = R.R$. Appliquée à $R = PDP^{-1}$, cette formule nous donne

$$\begin{aligned}(PDP^{-1})^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\\ &= PD(P^{-1}P)DP^{-1}\\ &= PD^2P^{-1}.\end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, on trouve

$$A^3 = A^2A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

En continuant ainsi, on montre que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Nous allons rédiger ce raisonnement en procédant par récurrence.

Montrons par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$H_n : \text{« } A^n = PD^nP^{-1} \text{ » est vraie.}$$

- On a

$$A^0 = I_2 = PD^0P^{-1}.$$

Par conséquent, la proposition H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition H_n est vraie. Nous avons $A^n = PD^nP^{-1}$. Nous avons montré que $D = P^{-1}AP$ et donc que $A = PDP^{-1}$. On en déduit que

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Par conséquent, la proposition H_{n+1} est vraie.

- Finalement, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour calculer u_n et v_n, il nous reste simplement, maintenant, à regrouper les résultats précédents. Nous avons vu que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^n\, X_0.$$

Il nous suffit donc de calculer A^n. Nous venons de montrer que $A^n = P D^n P^{-1}$. Il nous suffit donc de calculer P^{-1} et D^n.

Il est facile d'inverser une matrice carrée de taille 2. De manière générale, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $ad - bc \neq 0$, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si l'on ne souhaite pas retenir la formule, on peut appliquer l'algorithme habituel basé sur le pivot de Gauß.

Le calcul de D^n est très simple puisque la matrice D est diagonale. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

D'après la question **1.**, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} X_n &= A^n\, X_0 \\ &= P D^n P^{-1}\, X_0. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tous calculs faits, on trouve que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_n = 3.2^n - 2.3^n \\ v_n = 3.2^n - 3^n \end{cases}$$

Exercice 14.9 : Matrice de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$. On note

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que la matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible si, et seulement si, on a

$$\forall i \neq j, a_i \neq a_j.$$

2. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall i \neq j, \alpha_i \neq \alpha_j$. Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P(X) & \mapsto & (P(\alpha_1),\dots,P(\alpha_n)) \end{array}.$$

Calculer la matrice de l'application dans la base $\mathcal{B} = (1,X,\dots,X^{n-1})$ au départ et la base canonique $\mathcal{C}$ à l'arrivée. En déduire que, quels que soient $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, P(\alpha_i) = \beta_i.$$

Connaissez-vous une autre façon de démontrer ce résultat ?

1. Première implication

Commençons par une remarque simple. S'il existe deux indices i et j distincts tels que $a_i = a_j$, alors les i-ème et j-ème lignes de la matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ sont égales et cette matrice ne peut pas être inversible. Cette implication n'est pas, à proprement parler, l'une de celles demandées. Cependant, sa contraposée en est une.

> Nous allons montrer que si la matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible, alors on a $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$. Par contraposition, il nous suffit de montrer que s'il existe $i \neq j$ tels que $a_i = a_j$, alors $V(a_1,\dots,a_n)$ n'est pas inversible. Cette dernière proposition est évidente puisque la matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ possède alors deux lignes identiques.

Seconde implication

Nous devons, à présent, démontrer l'implication réciproque : si $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$, alors la matrice $V(a_1,\dots,a_n)$ est inversible. Nous allons chercher à montrer que le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice est nul.

Démontrons, à présent, l'implication réciproque. Supposons que, quels que soient les indices i et j distincts, on a $a_i \neq a_j$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $V(a_1,\ldots,a_n)$, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $V(a_1,\ldots,a_n)$. Soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \text{Ker}(f)$. On a alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2\,a_1 + \cdots + x_n\,a_1^{n-1} = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_1 + x_2\,a_n + \cdots + x_n\,a_n^{n-1} = 0 \end{cases}.$$

Posons $P(X) = x_1 + x_2\,X + \cdots + x_n\,X^{n-1}$. Le système précédent peut s'écrire sous la forme

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ P(a_i) = 0.$$

Par conséquent, le polynôme $P(X)$ possède au moins n racines distinctes : $a_1,\ldots,a_n$. Puisque le polynôme $P(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, cette condition impose que ce soit le polynôme nul. On en déduit que $x_1 = \cdots = x_n = 0$ et donc que $x = 0$.

Nous avons montré que le noyau de l'endomorphisme f est nul. On en déduit que f est un isomorphisme et donc que sa matrice $V(a_1,\ldots,a_n)$ dans la base canonique est inversible.

2. Commençons par calculer la matrice de l'application φ dans les bases demandées.

Quel que soit $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, nous avons

$$\varphi(X^i) = (\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i).$$

On en déduit que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée est

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Nous retrouvons la matrice $V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ que nous avons étudiée à la question précédente. Puisque, par hypothèse, les nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont deux à deux distincts, nous savons que cette matrice est inversible. Il nous reste à interpréter ce résultat de la façon dont l'énoncé nous le suggère.

Quels que soient $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, avec $i \neq j$, nous avons $\alpha_i \neq \alpha_j$. D'après la question précédente, la matrice $V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est donc inversible. On en

déduit que l'application linéaire φ est un isomorphisme. C'est en particulier une application bijective. Quels que soient $\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{K}$, il existe donc un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant $\varphi(P) = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, c'est-à-dire

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ P(\alpha_i) = \beta_i.$$

Le résultat obtenu nous rappelle un résultat du cours sur l'interpolation polynomiale et, précisément, l'interpolation de Lagrange (*cf.* exercice **15.6**). Ce dernier nous fournit des formules explicites pour trouver un polynôme $P(X)$ vérifiant les conditions requises.

Nous pouvons démontrer le même résultat en raisonnant uniquement sur les polynômes.

• **Unicité.** Démontrons, tout d'abord, l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ P(\alpha_i) = Q(\alpha_i) = \beta_i.$$

On a alors

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ (P-Q)(\alpha_i) = 0.$$

Le polynôme $P-Q$ est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui possède n racines distinctes $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. C'est nécessairement le polynôme nul. On en déduit que $P = Q$.

• **Existence.** Pour montrer l'existence du polynôme demandé, nous allons utiliser l'interpolation de Lagrange. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. On pose

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j} \in \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

On a alors

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, L_i(X) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

vérifie alors les conditions requises.

Exercice 14.10 : Matrices de permutations (MPSI)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel que soit $\sigma \in S_n$, on note M_σ la matrice carrée de taille n dont la j-ème colonne est le $\sigma(j)$-ème vecteur de la base canonique.

1. Soit $\sigma \in S_n$. Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $m_{i,j}$, pour $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

2. Soient $\sigma,\tau \in S_n$. Montrer que l'on a l'égalité

$$M_{\sigma \circ \tau} = M_\sigma M_\tau.$$

En déduire que la matrice M_σ est inversible et calculer son inverse.

3. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que la matrice M_σ est orthogonale.

4. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que la trace de la matrice M_σ est égale au nombre de points fixes de la permutation σ.

Soient $\sigma_1,\sigma_2 \in S_n$. Montrer que les permutations $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ont le même nombre de points fixes.

5. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que le déterminant de la matrice M_σ est égal à la signature de la permutation σ.

1. Cette première question est élémentaire. Elle a pour but de nous faire manipuler les objets introduits afin de mieux les comprendre. Il est néanmoins essentiel d'en rédiger correctement la réponse.

Soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. Par définition de M_σ, sa j-ème colonne est égale au $\sigma(j)$-ème vecteur de la base canonique. La j-ème colonne de M_σ n'est autre que le vecteur $\begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, nous avons donc

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq \sigma(j)\ ; \\ 1 & \text{si} \quad i = \sigma(j). \end{cases}$$

2. Cette deuxième question consiste en une vérification. Puisque nous connaissons l'expression explicite des coefficients des matrices M_σ et M_τ, nous allons pouvoir calculer les coefficients du produit de ces deux matrices par la formule habituelle. Rappelons-la. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont deux matrices et que l'on note $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ leur produit, on a

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Notons $M_\sigma = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $M_\tau = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $M_\sigma M_\tau = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $M_{\sigma\circ\tau} = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Par définition du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= a_{i,\tau(j)}. \end{aligned}$$

En effet, d'après le résultat de la question précédente utilisé pour la matrice M_τ, on a $b_{\tau(j),j} = 1$ et, quel que soit $k \neq \tau(j)$, $b_{k,j} = 0$. En utilisant ce résultat pour la matrice M_σ, on obtient

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq \sigma(\tau(j))\ ; \\ 1 & \text{si} \quad i = \sigma(\tau(j)). \end{cases}$$

Nous retrouvons l'expression du coefficient $d_{i,j}$. On en déduit que

$$M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\circ\tau}.$$

Nous devons, à présent, montrer que la matrice M_σ est inversible et calculer son inverse. Nous cherchons donc une matrice N qui vérifie

$$M_\sigma N = \mathrm{I}_n.$$

Le résultat précédent nous suggère de chercher cette matrice N sous la forme M_τ, avec $\tau \in S_n$. Nous devons alors trouver τ tel que l'on ait

$$M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\circ\tau} = \mathrm{I}_n.$$

Il est clair que nous avons $M_{\mathrm{Id}} = \mathrm{I}_n$. Par conséquent, nous obtiendrons le résultat voulu si $\sigma \circ \tau = \mathrm{Id}$. Il suffit donc de choisir $\tau = \sigma^{-1}$. Il n'est pas nécessaire d'inclure ce raisonnement dans la rédaction finale. Une vérification suffit.

D'après la formule précédente, on a

$$\begin{aligned} M_\sigma M_{\sigma^{-1}} &= M_{\sigma\circ\sigma^{-1}} \\ &= M_{\mathrm{Id}} \\ &= \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice M_σ est inversible et que l'on a

$$(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}.$$

3. Par définition de l'orthogonalité d'une matrice, nous devons montrer que

$$ {}^t M_\sigma = (M_\sigma)^{-1}. $$

Il est donc naturel de commencer par calculer la matrice ${}^t M_\sigma$.

Commençons par calculer la transposée de la matrice M_σ. Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et ${}^t M_\sigma = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. D'après la question **1.**, quels que soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$ \begin{aligned} n_{i,j} &= m_{j,i} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \sigma(i) \\ 1 & \text{si } j = \sigma(i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \sigma^{-1}(j) \\ 1 & \text{si } i = \sigma^{-1}(j) \end{cases}. \end{aligned} $$

On en déduit que

$$ {}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}} = (M_\sigma)^{-1}, $$

d'après la question précédente.

On en déduit que la matrice M_σ est orthogonale.

4. Puisque nous connaissons l'expression des coefficients de la matrice $M_\sigma = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, il ne sera pas difficile de calculer sa trace. Par définition, elle vaut

$$ \operatorname{tr}(M_\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}. $$

Il nous restera ensuite à identifier l'expression obtenue avec le nombre de points fixes de σ.

Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Par définition, on a

$$ \operatorname{tr}(M_\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}. $$

D'après la question **1.**, quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$ m_{i,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \sigma(i) \,; \\ 1 & \text{si } i = \sigma(i). \end{cases} $$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{tr}(M_\sigma) = \mathrm{Card}\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid i = \sigma(i)\}.$$

Cette dernière expression est le nombre de points fixes de la permutation σ.

Le résultat que l'on nous demande ensuite de démontrer est une application directe du précédent et découle simplement des propriétés de la trace.

D'après les propriétés de la trace, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M_{\sigma_1 \circ \sigma_2}) &= \mathrm{tr}(M_{\sigma_1} M_{\sigma_2}) \\ &= \mathrm{tr}(M_{\sigma_2} M_{\sigma_1}) \\ &= \mathrm{tr}(M_{\sigma_2 \circ \sigma_1}). \end{aligned}$$

D'après le résultat précédent, on en déduit que les permutations $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ont le même nombre de points fixes.

Ce résultat ne dit rien sur les points fixes eux-mêmes. Il est possible que les points fixes des permutations $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$ soient différents. Considérons, par exemple, les permutations $\sigma_1 = (1\ 2)$ et $\sigma_2 = (1\ 2\ 3)$ dans S_3. Nous avons

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = (2\ 3),$$

dont l'unique point fixe est 1, et

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = (1\ 3),$$

dont l'unique point fixe est 2.

5. Cette question est plus difficile que les précédentes. Cela tient au fait qu'il n'est pas simple d'obtenir la signature d'une permutation. Rappelons-en une définition. Si $\sigma \in S_n$ possède une écriture sous la forme

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p,$$

où $p \in \mathbb{N}$ et $\tau_1,\ldots,\tau_p$ sont des transpositions, alors la signature de la permutation σ vaut

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p.$$

Cette quantité ne dépend pas de l'écriture de σ comme produit de transpositions.

Au vu de cette définition, une méthode s'impose naturellement. On commence par écrire σ comme produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$. Nous voulons ensuite calculer la quantité $\det(M_\sigma)$. Mais nous savons que

$$\begin{aligned}\det(M_\sigma) &= \det(M_{\tau_1\circ\cdots\circ\tau_p})\\ &= \det(M_{\tau_1}\cdots M_{\tau_p}),\end{aligned}$$

d'après la question **2.**. Nous obtenons finalement

$$\det(M_\sigma) = \det(M_{\tau_1})\cdots\det(M_{\tau_p}).$$

Il nous suffit donc de calculer $\det(M_{\tau_i})$, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$. Puisque les matrices M_{τ_i} sont simples, cela ne devrait pas être difficile.

Nous savons que la permutation σ peut s'écrire comme produit de transpositions. Il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et des transpositions $\tau_1,\ldots,\tau_p$ vérifiant

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p.$$

Dans ce cas, la signature de la permutation σ est

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p.$$

Calculons tout d'abord le déterminant d'une transposition $\tau \in S_n$. Supposons que ce soit la transposition (i,j), avec $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ et $i < j$. La matrice M_τ est alors obtenue à partir de la matrice identité en échangeant les colonnes i et j. Nous savons qu'en échangeant deux colonnes dans un déterminant, on multiplie celui-ci par -1. On en déduit que

$$\det(M_\tau) = -\det(\mathrm{I}_n) = -1.$$

Calculons, à présent, le déterminant de M_σ. D'après la question **2.**, on a

$$M_\sigma = M_{\tau_1}\cdots M_{\tau_p}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\det(M_\sigma) &= \det\left(M_{\tau_1}\cdots M_{\tau_p}\right)\\ &= \det(M_{\tau_1})\cdots\det(M_{\tau_p})\\ &= (-1)^p\\ &= \varepsilon(\sigma).\end{aligned}$$

Il existe une autre façon de démontrer le résultat en revenant à la définition du déterminant. Le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right).$$

En appliquant cette formule à la matrice M_σ, nous devrions retrouver encore le résultat attendu. Nous proposons également une rédaction de l'exercice par cette méthode.

Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Par définition, on a

$$\det(M_\sigma) = \sum_{\tau\in S_n}\left(\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n} m_{i,\tau(i)}\right).$$

Presque tous les coefficients de la somme sont nuls. Soit $\tau \in S_n$. Pour que le terme $\prod_{i=1}^{n} m_{i,\tau(i)}$ ne soit pas nul, il faut que, quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, le coefficient $m_{i,\tau(i)}$ ne soit pas nul. D'après la question **1.**, on en déduit qu'il faut que, quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, on ait $i = \sigma(\tau(i))$, autrement dit, $\sigma^{-1}(i) = \tau(i)$ et donc $\sigma^{-1} = \tau$. Par conséquent, la somme donnant le déterminant ne comporte qu'un seul terme non nul :

$$\begin{aligned}\det(M_\sigma) &= \varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma^{-1}(i)}\\ &= \varepsilon(\sigma^{-1}).\end{aligned}$$

En effet, quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a $m_{i,\sigma^{-1}(i)} = 1$, puisque $i = \sigma(\sigma^{-1}(i))$. Or nous savons que $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$. On en déduit que

$$\det(M_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

S'il n'est pas connu, le résultat $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ peut se redémontrer facilement. En effet, si σ s'écrit comme produit de transpositions sous la forme

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p,$$

alors σ^{-1} s'écrit

$$\sigma^{-1} = \tau_p^{-1} \circ \cdots \circ \tau_1^{-1} = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1.$$

Le nombre de transposistions intervenant dans σ et σ^{-1} est le même et nous avons donc

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) = (-1)^p.$$

Exercice 14.11 : Formes linéaires sur les espaces de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on associe une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(AM) \end{array}.$$

Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont le coefficient placé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 et les autres 0. Nous noterons $\varphi_{i,j} = \varphi_{E_{i,j}}$.

1. Montrer que la famille $(\varphi_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre.

2. Montrer que toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ est de la forme φ_A, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Pour montrer qu'une famille est libre, on procède toujours de la même manière : on considère une combinaison linéaire nulle et on montre qu'elle est triviale. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ vérifiant

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j}\, \varphi_{i,j} = 0.$$

Pour obtenir des informations sur les $\lambda_{i,j}$, nous allons appliquer la relation précédente entre formes linéaires à certains vecteurs. Il est naturel de l'appliquer, tout d'abord, aux vecteurs de la forme $E_{k,l}$.

Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ vérifiant

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_{i,j}\, \varphi_{i,j} = 0.$$

Remarquons que, quel que soient $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$E_{i,j}\, E_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k\ ; \\ E_{i,l} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Par conséquent, quel que soient $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\varphi_{i,j}(E_{k,l}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k\ ; \\ 0 & \text{si } j = k \text{ et } i \neq l\ ; \\ 1 & \text{si } j = k \text{ et } i = l. \end{cases}$$

Soient $k,l \in \{1,\ldots,n\}$. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \lambda_{i,j}\,\varphi_{i,j}(E_{k,l}) = \lambda_{l,k} = 0.$$

On en déduit que la famille $(\varphi_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre.

2. D'après la question précédente, la famille $(\varphi_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}))^*$. En fait, nous avons même mieux. En effet, cette famille possède n^2 vecteurs et on a

$$\dim\left((M_n(\mathbb{R}))^*\right) = \dim\left(M_n(\mathbb{R})\right) = n^2.$$

Par conséquent, la famille $(\varphi_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $(M_n(\mathbb{R}))^*$. Cette remarque nous permet d'écrire toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire des $\varphi_{i,j}$. Cela devrait nous suffire pour conclure.

Nous avons

$$\dim\left((M_n(\mathbb{R}))^*\right) = \dim\left(M_n(\mathbb{R})\right) = n^2.$$

Par conséquent, la famille $(\varphi_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $(M_n(\mathbb{R}))^*$, car elle est libre et possède n^2 vecteurs.
Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Nous savons qu'il existe $(\mu_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ vérifiant

$$\varphi = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mu_{i,j}\,\varphi_{i,j}.$$

Or, par linéarité de la trace, quels que soient $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \varphi_A + \varphi_B &= \varphi_{A+B} \\ \alpha\,\varphi_A &= \varphi_{\alpha A} \end{cases},$$

On en déduit que $\varphi = \varphi_R$, où $R = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mu_{i,j}\,E_{i,j}$.

Polynômes

15

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 15.1 : Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

3. Déterminer les racines de T_n.

4. Déterminer des relations analogues à celle de la deuxième question pour T_n' et T_n''. En déduire une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par T_n.

5. Déterminer les racines de T_n' et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire, de deux manières différentes, la valeur de $T_n'(0)$.

Bien que cela ne soit pas demandé ici il est souvent utile, quand une suite est définie par récurrence, de calculer ses premiers termes. Ceci permet parfois de deviner les résultats aux questions mais aussi de vérifier sur des exemples simples les calculs généraux ultérieurs.

Nous allons donc calculer les premiers polynômes T_n à l'aide de la relation de récurrence mais également T_n' et T_n'' vu qu'ils interviennent dans les deux dernières questions.

n	T_n	T'_n	T''_n
0	1	0	0
1	X	1	0
2	$2X^2-1$	$4X$	4
3	$4X^3-3X$	$12X^2-3$	$24X$
4	$8X^4-8X^2+1$	$32X^3-16X$	$96X^2-16$

À la vue de ces premiers exemples on voit qu'il est raisonnable de penser que T_n est de degré n. De plus, il semblerait que, si $n \neq 0$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

Pour répondre à la première question il n'y a plus qu'à poser ces propriétés dans une hypothèse de récurrence.

1. On peut proposer deux rédactions pour la récurrence :

– la première est de poser H_n : « T_n est de degré n », d'initialiser en démontrant H_0 et H_1 et de démontrer l'hérédité en établissant l'implication $(H_n$ et $H_{n+1}) \Rightarrow H_{n+2}$;

– la seconde est de poser H_n : « pour $k \leqslant n$, T_k est de degré k ». On initialise pour $n = 1$ et l'hérédité consiste simplement à montrer que H_n implique H_{n+1}.

Nous allons ici utiliser la première rédaction.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « T_n est de degré n ».

- H_0 et H_1 sont clairement vraies car $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies.

On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. D'après l'hypothèse de récurrence on a $\deg(T_n) = n$ et $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n + 2$.

Comme $\deg(2XT_{n+1})$ et $\deg(T_n)$ sont distincts le degré de leur différence est le maximum de ces degrés, *i.e.* $n + 2$. Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = n + 2$ donc H_{n+2} est vraie.

- En conclusion, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n.$$

Il faut être prudent avec les degrés de sommes. En général, on a seulement l'inégalité $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (l'inégalité étant due au fait que les coefficients dominants peuvent se simplifier). Lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$, on a l'égalité $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
Il faut toujours vérifier cette condition pour calculer exactement le degré d'une somme.

Pour le coefficient dominant nous pouvons nous contenter d'une récurrence simple vu que l'on connaît le degré de chacun des polynômes intervenant dans la relation de récurrence : il n'y a donc qu'à considérer directement les termes de plus hauts degrés.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons K_n : « le coefficient dominant de T_{n+1} est 2^n ».

- K_0 est clairement vraie car $T_1 = X$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que K_n soit vraie.

On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Comme T_{n+2} est de degré $n+2$ son coefficient dominant est le coefficient de X^{n+2} dans $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Le degré de T_n étant n, le coefficient de X^{n+2} dans T_n est 0.

Le degré de T_{n+1} étant $n+1$, le coefficient de X^{n+2} dans $2XT_{n+1}$ est le double de celui de X^{n+1} dans T_{n+1}, *i.e.* le double du coefficient dominant de T_{n+1} qui est, par hypothèse, 2^n.

Ainsi, le coefficient dominant de T_{n+2} est 2^{n+1} donc K_{n+1} est vraie.

- En conclusion, K_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{le coefficient dominant de } T_{n+1} \text{ est } 2^n.$$

2. Cette question est double : il faut montrer que T_n possède la propriété annoncée mais également que c'est le seul polynôme la vérifiant. Il est beaucoup plus simple et clair de séparer ces deux questions.

Vérification de la propriété

Pour établir que T_n vérifie la relation donnée nous allons, sans surprise, raisonner par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Il reste à poser correctement l'hypothèse de récurrence. On veut montrer que, n étant donné, une certaine relation est vraie pour tout réel θ ; la quantification « $\forall \theta \in \mathbb{R}$ » apparaîtra donc dans l'hypothèse de récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ».

- H_0 et H_1 sont clairement vraies : $T_0(\cos(\theta)) = 1$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ pour tout réel θ.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Soit un réel θ. Alors :

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) &= \cos((n+1)\theta + \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \cos((n+1)\theta - \theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

d'où

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$$

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\cos((n+2)\theta) + T_n(\cos(\theta)) = 2T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta)$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))\\ &= T_{n+2}(\cos(\theta))\end{aligned}$$

ce qui démontre H_{n+2}.

- En conclusion, H_n est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Unicité du polynôme

Soit P un polynôme vérifiant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
On a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$$

ou encore, vu que $\cos(\theta)$ parcourt $[-1,1]$ quand θ parcourt $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in [-1,1], P(x) = T_n(x).$$

Ainsi, $P - T_n$ possède une infinité de racines (au moins tous les éléments de $[-1,1]$) ; ce polynôme est donc nul, d'où $P = T_n$.

3. On voit que, si θ est un réel tel que $\cos(n\theta) = 0$, $\cos(\theta)$ est une racine de T_n. Cependant, ces racines sont toutes de valeurs absolues inférieures ou égales à 1; rien n'interdit, *a priori*, qu'il y en ait d'autres. Nous allons donc compter ces racines ; s'il y en a n distinctes nous pourrons alors affirmer que ce sont les seules.
Fixons donc $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\cos(n\theta) = 0$, il existe un entier relatif k tel que $n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et enfin $\cos(\theta) = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. Cependant, différentes valeurs de k peuvent donner la même valeur de ce cosinus.

Plus précisément, on voit qu'en remplaçant k par $k + 2n$ le cosinus prend la même valeur. Ceci permet donc déjà de se restreindre à $k \in \{0,\dots,2n-1\}$.

De même, en chageant k en $2n - k - 1$, le cosinus ne change pas (formule de trigonométrie usuelle). On peut donc même se restreindre à $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

Pour de telles valeurs de k, les valeurs du cosinus sont bien distinctes: en effet, en notant $a_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ on a:

$$0 < a_0 < \cdots < a_{n-1} = \frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$$

d'où, la fonction cosinus étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$:

$$\cos(a_{n-1}) < \cdots < \cos(a_k) < \cdots < \cos(a_0).$$

Ainsi, les réels $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec $k = 0,\dots,n-1$, sont tous des racines de T_n et sont deux à deux distincts, ce qui fournit n racines distinctes de T_n.

Comme T_n est de degré n, ce sont ses seules racines et elles sont toutes simples.

4. La relation de la deuxième question étant vraie pour tout réel θ nous pouvons la dériver ; cependant, il faut faire attention au fait que le membre de gauche est une fonction composée.

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout réel θ :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

En dérivant cette relation par rapport à θ il vient :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta)$$

puis en dérivant une seconde fois :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, -\sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n^2\cos(n\theta).$$

Notons que le second membre de cette dernière relation n'est autre que $n^2T_n(\cos(\theta))$ et que $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$. On peut donc écrire cette relation en fonction de T_n, T_n', T_n'' et $\cos(\theta)$.

Cette dernière relation peut également s'écrire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},$$
$$(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2 T_n(\cos(\theta)) = 0.$$

Or, quand θ parcourt $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ parcourt $[-1,1]$, d'où :

$$\forall x \in [-1,1], (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Ainsi, le polynôme $(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2 T_n(X)$ possède une infinité de racines ; il est donc nul, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Ne pas conclure trop rapidement : la relation en $\cos(\theta)$ obtenue ne permet d'en déduire qu'une équation différentielle vérifiée sur $[-1,1]$, il faut un argument supplémentaire (un polynôme qui a une infinité de racines est nul) pour conclure.

5. Cette question est semblable à la troisième : la formule reliant T_n' et les fonctions trigonométriques obtenue à la question précédente permet de déterminer facilement des racines de T_n' ; il restera alors à vérifier qu'il n'y en a pas d'autres.

Nous avons vu que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta).$$

En particulier, pour $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ il vient :

$$\sin(k\pi/n)T_n'(\cos(k\pi/n)) = 0$$

car $\sin(k\pi) = 0$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ posons $x_k = \cos(k\pi/n)$. On a alors $\sin(k\pi/n) \neq 0$ d'où :

$$T_n'(x_k) = 0.$$

Enfin, la fonction cosinus étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$ on a :

$$x_1 > \cdots > x_{n-1}$$

ce qui montre que les réels x_k, k allant de 1 à $n-1$, sont deux à deux distincts.

Ainsi, nous avons déterminé $n-1$ racines distinctes de T_n'. Or T_n' est de degré $n-1$, ce qui montre qu'il n'a pas d'autre racine et qu'elles sont toutes simples.

Comme son coefficient dominant est $n2^{n-1}$ on a donc :

$$T_n' = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Il nous reste à calculer $T_n'(0)$. Nous pouvons le faire de deux manières différentes, soit en utilisant la factorisation, soit en utilisant l'expression de $T_n'(\cos(\theta))$.

Nous avons vu que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n\sin(n\theta).$$

En écrivant cette égalité pour $\theta = \pi/2$, on obtient

$$T_n'(0) = n\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Distinguons deux cas.

• Si n est pair, nous avons $n\pi/2 = 0 \bmod \pi$ et donc

$$T_n'(0) = 0.$$

• Si n est impair, nous pouvons l'écrire sous la forme $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} T_{2p+1}'(0) &= (2p+1)\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) \\ &= (2p+1)(-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (2p+1)(-1)^p. \end{aligned}$$

Nous pouvons également calculer $T_n'(0)$ en utilisant la factorisation du polynôme T_n' trouvée précédemment. Nous obtenons

$$\begin{aligned} T_n'(0) &= n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= n2^{n-1}(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Il est bon de vérifier que cette dernière expression redonne bien $T_n'(0) = 0$, lorsque n est pair. C'est bien le cas, puisque le terme d'indice $k = n/2$ du produit vaut

$$\cos\left(\frac{\frac{n}{2}\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Exercice 15.2 : Polynômes de Legendre

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

3. Calculer de deux manières différentes $L_n(0)$.

1. Comme précédemment, il est utile de calculer les premiers termes de la suite de polynômes considérée. Nous avons

- $L_0(x) = 1$;
- $L_1(x) = x$;
- $L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$;
- $L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Sur ces exemples, il semble que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $L_n(x)$ est de degré n. Cela découle d'ailleurs facilement des propriétés de la dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $(x^2-1)^n$ est de degré $2n$ donc sa dérivée n-ième est de degré $2n - n = n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(L_n) = n.$$

Le coefficient dominant de L_n est le coefficient de son terme de degré n qu'on peut déterminer à partir du coefficient dominant de $(x^2-1)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Le terme de plus haut degré de $(x^2-1)^n$ est x^{2n}. Sa dérivée n-ième est $\frac{(2n)!}{n!}x^n$ d'où le coefficient dominant de L_n : $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

2. Nous ne connaissons aucune formule pour calculer directement les dérivées du polynôme $(x^2-1)^n$. Cependant, nous pouvons calculer les dérivées des polynômes $(x-1)^n$ et $(x+1)^n$. Pour $k \leqslant n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x-1)^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}\,(x-1)^{n-k}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x+1)^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}\,(x+1)^{n-k}.$$

Pour calculer les dérivées du polynôme $(x^2-1)^n$, il ne nous reste plus qu'à appliquer la formule de Leibniz.

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x-1)^n\right)\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left((x+1)^n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} n!\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.
\end{aligned}$$

Tous les termes de la somme sont nuls en 1 sauf celui d'indice $k=n$ qui vaut $n!2^n$; on a donc $L_n(1)=1$.

De même, le seul terme non nul en -1 de la somme est celui d'indice $k=0$ qui vaut $n!(-2)^n$; on a donc $L_n(-1)=(-1)^n$.

3. La première façon de calculer $L_n(0)$ qui nous vient à l'esprit consiste à utiliser la même méthode que précédemment.

Pour $x=0$ la formule précédente donne

$$L_n(0) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-1)^{n-k}.$$

Cette formule ne semble pas aisée à simplifier. Nous allons donc tâcher de trouver une autre expression de $L_n(0)$. À cet effet, remarquons que $L_n(0)$ est le terme constant de L_n. Puisque L_n est une dérivée n-ième, le terme $L_n(0)$ provient donc de la dérivation du terme de degré n de $(x^2-1)^n$.

Le polynôme $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$. Il existe donc $a_0,\dots,a_{2n} \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k}\, x^k.$$

En $x=0$, seul le terme d'indice $k=0$ de la somme n'est pas nul (il vaut $n!a_n$). Finalement, nous avons

$$L_n(0) = \frac{a_n}{2^n}.$$

Distinguons, à présent, deux cas.

- Si n est impair, le terme de degré n de $(x^2-1)^n$ est nul et, ainsi,

$$L_n(0) = 0.$$

- Si n est pair, le coefficient du terme de degré n de

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k}(-1)^k$$

est

$$a_n = \binom{n}{n/2}(-1)^{n/2}.$$

On en déduit que

$$L_n(0) = (-1)^{n/2}\frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}.$$

Exercice 15.3 : Relations coefficients-racines

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que les racines complexes de X^3-X+1 sont simples. On les note a, b et c.

Calculer $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$, $a^7+b^7+c^7$ et $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$.

2. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \end{cases}$$

1. Il y a deux manières de voir la notion de multiplicité d'une racine ; nous les rappelons brièvement.

Si a est une racine de P, son ordre de multiplicité est le plus grand entier naturel non nul r tel que $(X-a)^r$ divise $P(X)$ (ainsi, $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas $P(X)$). Si $r=1$ la racine est dite simple, si $r \geqslant 2$ la racine est dite multiple.

Les propriétés suivantes sont équivalentes (caractérisation différentielle de la multiplicité) :

i) a est racine de P d'ordre de multiplicité r ;

ii) $P^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,\ldots,r-1$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

En particulier, a est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(a)=P'(a)=0$.

D'une manière générale, la définition de la multiplicité n'est utilisable que si l'on connaît explicitement la racine : il n'y a alors qu'à factoriser $X-a$ autant que possible en effectuant des divisions euclidiennes successives.

La caractérisation différentielle permet d'étudier la multiplicité des racines de P sans avoir à connaître explicitement ces racines. C'est donc celle-là que nous utiliserons ici.

Soit $P = X^3 - X + 1$.

Si un nombre complexe z est racine multiple de P alors $P(z) = P'(z) = 0$, soit $z^3 - z + 1 = 0$ et $3z^2 - 1 = 0$.

En multipliant cette dernière relation par z on obtient $3z^3 = z$; or la première donne $z^3 = z - 1$, on en déduit donc $z = 3/2$. Enfin, en remplaçant dans $3z^2 = 1$ il vient $4 = 27$, ce qui est absurde.

Ainsi, les racines complexes de P sont simples.

On note a,b,c les racines du polynôme $X^3 - X + 1$. Cela impose au polynôme de se factoriser sous la forme

$$X^3 - X + 1 = (X-a)(X-b)(X-c).$$

En développant et identifiant les coefficients, nous obtenons des équations vérifiées par les racines.

Puisque a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X + 1$, nous avons

$$X^3 - X + 1 = (X-a)(X-b)(X-c).$$

En développant et identifiant les coefficients, il vient

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ ab+bc+ca &= -1 \\ abc &= -1 \end{cases}$$

Ces premières relations vont nous permettre d'en obtenir d'autres en les manipulant. Pour calculer la somme des carrés des racines, nous allons élever la première relation au carré.

En élevant au carré la première relation il vient

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2.$$

Remarquons que nous connaissons également d'autres relations du fait que les nombres complexes a, b et c sont racines du polynôme $X^3 - X + 1$.

Puisque les nombres complexes a, b et c sont racines du polynôme $X^3 - X + 1$, nous avons

$$\begin{cases} a^3 &= a - 1, \\ b^3 &= b - 1, \\ c^3 &= c - 1 \end{cases}$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c - 3 = -3.$$

Pour calculer la somme des puissances septièmes, il va falloir faire preuve d'un peu plus de réflexion. Il s'agit néanmoins d'un procédé classique. Commençons par effectuer la division euclidienne du polynôme X^7 par le polynôme $X^3 - X + 1$. Nous obtenons

$$X^7 = (X^3 - X + 1)(X^4 + X^2 - X + 1) - 2X^2 + 2X - 1.$$

En spécialisant en a, b et c il vient que seule la partie correspondant au reste peut donner une contribution non nulle. La somme des puissances septièmes des racines s'exprime donc en fonction des sommes des puissances inférieures à deux des racines. Bien entendu, nous pourrions mettre en œuvre le même raisonnement pour tout polynôme et pas seulement pour X^7.

Effectuons la division euclidienne du polynôme X^7 par le polynôme $X^3 - X + 1$:

$$X^7 = (X^3 - X + 1)(X^4 + X^2 - X + 1) - 2X^2 + 2X - 1.$$

En spécialisant en a, b et c, nous obtenons

$$\begin{cases} a^7 &= -2a^2 + 2a - 1 \\ b^7 &= -2b^2 + 2b - 1 \\ c^7 &= -2c^2 + 2c - 1 \end{cases}$$

puis, en additionnant :

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 + c^7 &= -2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c) - 3 \\ &= -7. \end{aligned}$$

Pour calculer la dernière expression demandée, il suffit de réduire au même dénominateur.

Finalement, nous avons

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

2. Nous allons, ici, suivre le cheminement inverse de celui de la question précédente. Les nombres complexes x, y et z sont racines d'un polynôme de degré 3. Si nous parvenons à le déterminer explicitement, nous pourrons alors obtenir x, y et z comme ses racines. Nous allons donc chercher à exprimer les coefficients de ce polynôme, qui sont des fonctions symétriques des racines x, y, z, en fonction des fonctions symétriques $x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$, dont nous connaissons les valeurs.

Procédons par analyse et synthèse. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ une solution du système. Considérons le polynôme

$$\begin{aligned} &(X - x)(X - y)(X - z) \\ &= X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy + yz + zx)X - xyz \end{aligned}$$

et cherchons à calculer ses coefficients. Par hypothèse, nous avons

$$x + y + z = 11.$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{1}{2}\left((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}(11^2 - 49) \\ &= 36 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ &= \frac{yz+zx+xy}{xyz} \\ &= \frac{36}{xyz}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$xyz = 36.$$

Par conséquent, nous avons

$$(X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - 11X^2 + 36X - 36.$$

Calculons les racines de ce polynôme. Le nombre réel 2 est racine évidente. En effectuant une division euclidienne, il vient

$$X^3 - 11X^2 + 36X - 36 = (X-2)(X^2 - 9X + 18).$$

Or

$$X^2 - 9X + 18 = (X-3)(X-6),$$

donc les racines de $X^3 - 11X^2 + 36X - 36$ sont 2, 3 et 6. On en déduit que le triplet (x,y,z) est égal au triplet $(2,3,6)$ ou à l'un de ceux qui s'en déduisent par permutation.

Réciproquement, on vérifie que les triplets précédents sont solutions du système.

Exercice 15.4 : Familles de polynômes échelonnée en degré

Soit $(P_0,\ldots,P_n)$ une famille de polynômes tels que, pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, on ait

$$\deg(P_k) = k.$$

Montrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Comme d'habitude, pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel de dimension finie, nous allons montrer qu'elle est libre puis qu'elle a le bon nombre de vecteurs. Soient $\lambda_0,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$(R) \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0.$$

Nous voulons montrer que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Pour cela, nous allons chercher à obtenir d'autres relations à partir de (R). En la dérivant, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i' = 0.$$

En effet, puisque le polynôme P_0 est de degré 0, nous avons $P_0' = 0$. Nous obtenons donc une relation entre polynômes de degré $0,\ldots,n-1$. Cela nous suggère de procéder par récurrence.

Montrons, par récurrence, que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la proposition

> H_k : « toute famille de polynômes $(Q_0,\ldots,Q_k)$
> vérifiant la condition $\forall i \in \{0,\ldots,k\}, \deg(Q_i) = i$
> est libre »

est vraie.

- Soit Q_0 un polynôme de degré 0. C'est un polynôme constant non nul. La famille (Q_0) est donc libre et la proposition H_0 est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la proposition H_k est vraie. Soit $(Q_0,\ldots,Q_{k+1})$ une famille de polynômes vérifiant la condition

$$\forall i \in \{0,\ldots,k+1\}, \deg(Q_i) = i.$$

Soient $\lambda_0,\ldots,\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i Q_i = 0.$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i Q_i' = 0,$$

car $Q_0' = 0$, puisque le polynôme Q_0 est de degré 0. Pour $i \in \{0,\ldots,k\}$, posons $R_i = Q_{i+1}'$. Puisque dériver un polynôme non constant fait baisser son degré d'exactement une unité, la famille $(R_0,\ldots,R_k)$ vérifie la propriété

$$\forall i \in \{0,\ldots,k\}, \deg(R_i) = i.$$

D'après la proposition H_k, cette famille est libre. On en déduit que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k+1} = 0.$$

Revenons à la relation de départ. Elle s'écrit, à présent,

$$\lambda_0 Q_0 = 0.$$

Puisque le polynôme Q_0 est de degré 0, il n'est pas nul et nous avons donc $\lambda_0 = 0$. Par conséquent, la famille $(Q_0, \ldots, Q_{k+1})$ est libre et la proposition H_{k+1} est vraie.

• Finalement, nous avons montré que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la proposition H_k est vraie.

En particulier, la proposition H_n est vraie. La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de l'énoncé est donc libre. Puisqu'elle est formée de $(n+1)$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15.5 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on pose $\Delta_n(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image. Quelle est sa matrice dans la base canonique ?

On pose $B_0(X) = 1$ et, pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$B_k(X) = \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (X - l) = \frac{1}{k!} X(X-1) \cdots (X-k+1).$$

2. Déterminer $\Delta_n(B_k)$.

3. Montrer que $(B_0, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelle est la matrice de Δ_n dans cette base ?

1. Dire que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ recouvre deux résultats : l'application Δ_n, définie sur $\mathbb{K}_n[X]$, est à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ et cette application est linéaire.

• **Δ_n est à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$:** $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ est bien un polynôme. De plus, son degré est inférieur ou égal à $\max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$ donc inférieur ou égal à n.

• **Linéarité de Δ_n :** soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors successivement :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n(\lambda P + \mu Q) & = & \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - (\lambda P(X) + \mu Q(X)) \\ & = & \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ & = & \lambda \Delta_n(P) + \mu \Delta_n(Q) \end{array}$$

ce qui montre que Δ_n est linéaire.

De plus, l'espace vectoriel de départ et celui d'arrivée sont égaux : Δ_n est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

Nous allons, maintenant, calculer le noyau et l'image de l'endomorphisme Δ_n. Il suffit de revenir aux définitions de ces espaces.

- **Noyau de Δ_n :** soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta_n)$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Le polynôme $P - P(0)$ est donc nul en tout point entier, donc est identiquement nul : ainsi $P = P(0)$, *i.e.* P est constant. Réciproquement, si P est constant, $\Delta_n(P) = 0$. Ainsi : $\operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]$.

- **Image de Δ_n :** $P(X+1)$ et $P(X)$ ont le même coefficient dominant donc $P(X+1) - P(X)$ est de degré strictement inférieur à celui de P puisque les termes de plus haut degré se simplifient. Or $\deg(P) \leqslant n$ donc $\deg(\Delta_n(P)) \leqslant n-1$. Ainsi, $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(\Delta_n)) + \dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]).$$

On sait que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ et on a vu que $\operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]$ et est donc de dimension 1 : ainsi, $\dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = n$ qui est aussi la dimension de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

En résumé : $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim(\operatorname{Im}(\Delta_n)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$ donc $\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Calculons, à présent, la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

- Avec $P = X^j$ on trouve $\Delta_n(P) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i$. On en déduit que la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & \binom{j}{i} & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$$

Il est toujours bon de traiter explicitement un exemple. Pour $n = 3$, nous obtenons la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le calcul de $\Delta_n(B_k)$ peut se faire explicitement grâce à la formule définissant B_k. Il nous faudra traiter à part les cas de $k = 0$ et $k = 1$.

On a $\Delta_n(B_0) = 0$ et $\Delta_n(B_1) = \Delta_n(X) = 1 = B_0$.
Si $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \Delta_n(B_k) &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-1}(X+1-l) - \prod_{l=0}^{k-1}(X-l)\right) \\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=-1}^{k-2}(X-l) - \prod_{l=0}^{k-1}(X-l)\right) \\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{l=0}^{k-2}(X-l)\right)\left((X+1)-(X-k+1)\right) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left(\prod_{l=0}^{k-2}(X-l)\right) \\ &= B_{k-1} \end{aligned}$$

En résumé : $\Delta_n(B_0) = 0$ et, pour $k \geqslant 1$, $\Delta_n(B_k) = B_{k-1}$.

3. La famille $(B_0, \ldots, B_n)$ est composée de $n+1$ vecteurs et l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$. Pour montrer que la famille $(B_0, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il nous suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i B_i = 0.$$

Nous voulons montrer que, quel que soit i, on a $\lambda_i = 0$. Pour cela, nous allons tâcher de construire de nouvelles relations à partir de celle que nous avons déjà. La relation que nous avons prouvée précédemment entre Δ_n et B_k nous permettra de faire cela.

Montrons, tout d'abord, que la famille $(B_0, \ldots, B_n)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i B_i = 0.$$

Supposons, par l'absurde, que la famille $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ ne soit pas nulle. Notons

$$j = \max\{i,\, \lambda_i \neq 0\}.$$

Nous avons donc

$$\sum_{i=0}^{j} \lambda_i B_i = 0.$$

D'après la question précédente, quel que soit $i \in \{0,\ldots,j-1\}$, nous avons

$$\Delta_n^j(B_i) = 0.$$

Nous avons également

$$\Delta_n^j(B_j) = 1.$$

En appliquant l'endomorphisme Δ_n^j à la relation dont nous disposons, nous trouvons donc

$$\lambda_j = \Delta_n^j\left(\sum_{i=0}^{j} \lambda_i B_i\right) = \Delta_n^j(0) = 0.$$

On en déduit que $\lambda_j = 0$, ce qui est absurde.

Nous venons donc de prouver que la famille $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ est nulle. On en déduit que la famille $(B_0,\ldots,B_n)$ est libre. Puisque cette famille est composée de $n+1$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, on en déduit finalement que la famille $(B_0,\ldots,B_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Nous aurions également pu rédiger le raisonnement précédent à l'aide d'une récurrence descendante plutôt que de faire intervenir l'indice j. En effet, en appliquant Δ_n^n à la relation, on montre que $\lambda_n = 0$. On obtient donc une relation qui possède un terme de moins et l'on recommence.
Une autre possibilité consiste à utiliser l'exercice précédent. En effet, la famille $(B_0,\ldots,B_n)$ est échelonnée en degré.

Il nous reste, à présent, à calculer la matrice de l'endomorphisme Δ_n dans la base $(B_0,\ldots,B_n)$. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente.

D'après la question précédente, nous avons $\Delta_n(B_0) = 0$ et, pour $k \geqslant 1$, $\Delta_n(B_k) = B_{k-1}$. On en déduit que la matrice de l'endomorphisme Δ_n dans la base $(B_0,\dots,B_n)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K}).$$

On voit que cette base est particulièrement bien adaptée à la description de Δ_n ! D'une manière générale, il ne faut jamais écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base sans avoir un minimum réfléchi auparavant à la base en question. Cependant, en première année, on vous donnera le plus souvent la base la mieux adaptée à l'endomorphisme.
En seconde année vous apprendrez à déterminer vous-même une telle base : ce sera le chapitre Réduction des endomorphismes.

Exercice 15.6 : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit n un entier naturel. Soient $a_1,\dots,a_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

1. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on pose $\Phi(P) = (P(a_1),\dots,P(a_{n+1}))$. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

2. On note $(e_1,\dots,e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour $k \in \{1,\dots,n+1\}$ on pose $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$. Montrer que $(L_1,\dots,L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et donner l'expression de L_k en fonction des a_j.

3. Plus précisément, étant donné $P \in \mathbb{K}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1,\dots,L_{n+1})$.

1. Pour montrer que Φ est un isomorphisme, nous allons découper le raisonnement en plusieurs étapes. Il est indispensable de bien vérifier tout d'abord que Φ est une application linéaire. Même si c'est un résultat immédiat, il ne faut pas oublier de le mentionner et le démontrer en quelques lignes.

Nous montrerons ensuite que Φ est un isomorphisme de façon classique, en montrant qu'il est injectif et en utilisant un argument de dimension.

• **Linéarité de Φ :** soient $(P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1),\dots,(\lambda P + \mu Q)(a_{n+1})) \\ &= (\lambda P(a_1) + \mu Q(a_1),\dots,\lambda P(a_{n+1}) + \mu Q(a_{n+1})) \\ &= \lambda (P(a_1),\dots,P(a_{n+1})) + \mu (Q(a_1),\dots,Q(a_{n+1})) \\ &= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q). \end{aligned}$$

Φ est donc bien linéaire. Noter le caractère routinier de ce genre de vérification.

- **Injectivité de Φ :** soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $\Phi(P) = (0,\ldots,0)$, *i.e.* $P(a_1) = \cdots = P(a_{n+1}) = 0$. Ainsi P possède au moins $n+1$ racines distinctes. Comme P est de degré au plus n, P est le polynôme nul. On a donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ donc Φ est injective.
- **Φ est un isomorphisme :** les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension : $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1}) = n+1$. On en déduit que Φ est un isomorphisme.

2. Le fait que la famille $(L_1,\ldots,L_{n+1})$ soit une base de $\mathbb{K}_n[X]$ découle directement du cours.

La famille $(L_1,\ldots,L_{n+1})$ est l'image de la base $(e_1,\ldots,e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ par l'isomorphisme Φ^{-1} : c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car l'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Fixons $k \in \{1,\ldots,n+1\}$ et cherchons à déterminer explicitement le polynôme L_k. Nous devons avoir $\Phi(L_k) = e_k$, autrement dit :

$$\forall j \in \{1,\ldots,n+1\},\ L_k(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Nous cherchons donc un polynôme qui s'annule en tous les a_j avec $j \neq k$, mais pas en a_k. Il est naturel de considérer le polynôme

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (X - a_j).$$

Nous parviendrons à retrouver le polynôme L_k à partir de celui-ci.

Soit $k \in \{1,\ldots,n+1\}$. Par définition, le polynôme L_k vérifie $\Phi(L_k) = e_k$ et donc

$$\forall j \in \{1,\ldots,n+1\},\ L_k(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Posons

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (X - a_j).$$

Nous avons alors $P_k(a_j) = 0$ si $j \neq k$ (car P_k possède alors un facteur $(X - a_j)$) et $P_k(a_k) \neq 0$ car

$$P_k(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (a_k - a_j)$$

est un produit de nombres dont aucun n'est nul.

Les polynômes L_k et $\dfrac{1}{P_k(a_k)} P_k$ prennent donc la même valeur en tous les a_j, à savoir 0 si $j \neq k$ et 1 si $j = k$. Autrement dit, ils ont même image par Φ, qui est injective, donc sont égaux.

On en déduit une expression condensée de L_k :

$$L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

3. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_{n+1})$: autrement dit, $P = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_{n+1} L_{n+1}$.

Considérons un entier $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Nous voulons déterminer λ_k. Puisque nous connaissons l'effet des L_j sur les a_i, il nous suffira de spécialiser la relation précédente en les différents a_i.

Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_{n+1} L_{n+1}.$$

Soit $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Comme $L_j(a_k) = 0$ si $j \neq k$ et 1 si $j = k$ l'égalité précédente devient, en spécialisant en a_k : $P(a_k) = \lambda_k$.

Ainsi,

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k.$$

En utilisant l'expression des L_k trouvée ci-dessus on a finalement :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \left(P(a_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right).$$

Espaces euclidiens

16

Exercice 16.1 : Caractérisation des projecteurs orthogonaux (sauf PTSI)

Soit E un espace euclidien dont nous noterons $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, quel que soit $x \in E$, on a

$$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

On nous demande ici de démontrer une équivalence. Nous allons démontrer deux implications.

Première implication

Dans notre cas, l'implication directe est plus simple. En effet, nous partons d'un projecteur orthogonal. Nous allons écrire sa définition et vérifier ensuite la propriété demandée.

Supposons, tout d'abord, que p soit un projecteur orthogonal. Par définition, il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que p soit le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(y,z) \in F \times F^{\perp}$ tel qu'on ait l'égalité

$$x = y + z.$$

D'après la définition de p, nous avons alors

$$p(x) = y.$$

Nous avons traduit en termes explicites les informations dont nous disposons, à savoir le fait que p est un projecteur orthogonal. Cette première étape ne demande que la connaissance du cours. Nous devons, à présent, démontrer une inégalité entre $\|p(x)\|$ et $\|x\|$. Nous allons donc commencer par calculer ces deux quantités. On a visiblement $\|p(x)\| = \|y\|$. Il est un peu plus difficile de calculer $\|x\| = \|y+z\|$. Pour calculer la norme d'une somme, on revient à la définition de la norme comme racine carrée du carré scalaire : nous avons

$$\|y+z\|^2 = \langle y+z, y+z\rangle.$$

Nous allons maintenant développer le second membre de cette égalité en utilisant la bilinéarité du produit scalaire. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle y+z, y+z\rangle &= \langle y,y\rangle + \langle y,z\rangle + \langle z,y\rangle + \langle z,z\rangle \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 + \langle y,z\rangle + \langle z,y\rangle.\end{aligned}$$

Le produit scalaire est, par définition, symétrique. Nous avons donc $\langle y,z\rangle = \langle z,y\rangle$. On en déduit que

$$\|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle y,z\rangle.$$

Cette formule est d'utilisation constante et il est bon de la retenir.

Nous avons

$$\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle y,z\rangle.$$

Or $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Nous avons donc $\langle y,z\rangle = 0$ et, ainsi,

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

On en déduit que

$$\|x\|^2 \geqslant \|y\|^2 = \|p(x)\|^2.$$

Puisque la fontion racine carrée est croissante sur $[0,+\infty[$, on a finalement

$$\|x\| \geqslant \|p(x)\|.$$

Seconde implication

Passons, maintenant, à la démonstration de l'implication réciproque. Commençons par traduire ce que nous devons démontrer. Il existe deux sous-espaces vectoriels F

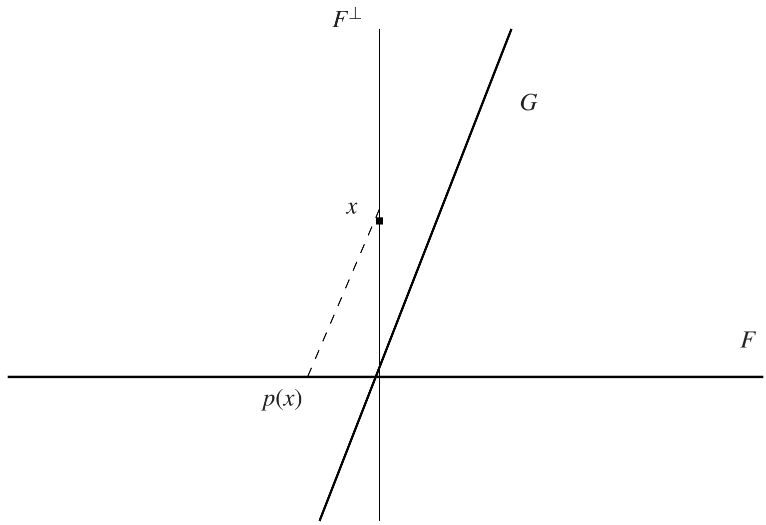
et G de E tel que le projecteur p soit le projecteur sur F parallèlement à G. Nous devons montrer que p est un projecteur orthogonal, autrement dit, que

$$F \perp G.$$

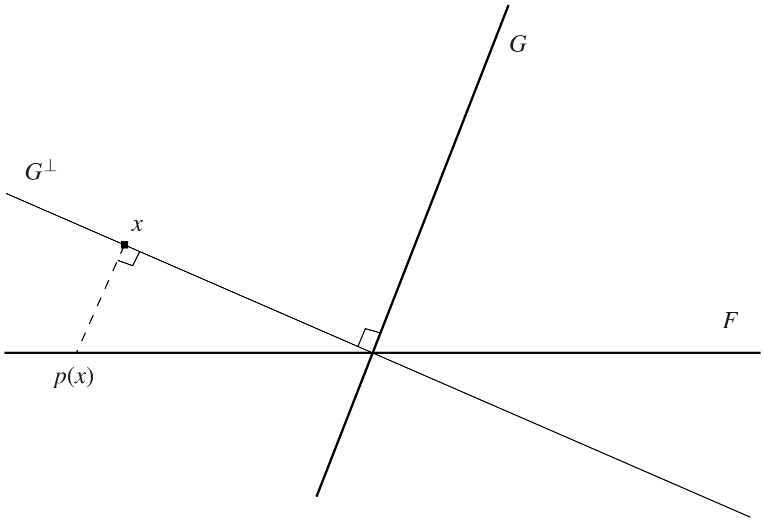
Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que F et G ne sont pas orthogonaux. Nous cherchons maintenant un élément x de E susceptible de violer l'inégalité $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. L'hypothèse que nous avons faite nous assure que $F^\perp \neq G$ et que $G^\perp \neq F$. Nous avons donc quatre types de candidats pour x : les éléments de $F^\perp \setminus G$, de $G \setminus F^\perp$, de $G^\perp \setminus F$ et de $F \setminus G^\perp$.

Nous pouvons éliminer facilement deux de ces types. Si $x \in G \setminus F^\perp$, nous avons $p(x) = 0$ et donc $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Si $x \in F \setminus G^\perp$, nous avons $p(x) = x$ et donc $\|p(x)\| = \|x\|$.

Considérons, à présent, un élément x de $F^\perp \setminus G$. Un dessin nous montre que nous pouvons encore avoir $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.



Il nous reste à considérer les éléments de $G^\perp \setminus F$. Faisons un nouveau dessin.



Il semble bien qu'un tel point s'éloigne de l'origine et vérifie $\|p(x)\| > \|x\|$. Pour le démontrer, nous allons appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle de sommets $0, x, p(x)$:

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Cette égalité nous permettra de conclure.

Supposons, à présent, que, quel que soit $x \in X$, on ait

$$\|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tel que le projecteur p soit le projecteur sur F parallèlement à G. Supposons, par l'absurde, que le projecteur p n'est pas orthogonal. Alors les espaces F et G ne sont pas orthogonaux. Nous pouvons donc choisir un élément $x \in G^\perp \setminus F$.

Il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Puisque $x \in G^\perp$, nous avons $\langle x, z \rangle = 0$ et donc

$$\|p(x)\|^2 = \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2.$$

Puisque $x \notin F$, nous avons $z \neq 0$, d'où l'on tire $\|z\| > 0$ et donc

$$\|p(x)\|^2 > \|x\|^2.$$

On aboutit à une contradiction.

Par conséquent, le projecteur p est orthogonal.

Exercice 16.2 : Matrices orthogonales d'ordre 3

Nous nous plaçons ici dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de l'orientation canonique. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et d'axe D orienté par un vecteur $u \in D$. Soit $u' \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Montrer que les quantités $\sin(\theta)$ et $\det_{\mathcal{C}}(u', r(u'), u)$ ont même signe strict. Qu'en est-il pour la composée s de la rotation r et de la réflexion par rapport à $D^\perp$?

2. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement l'endomorphisme a.

3. Soit b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement l'endomorphisme b.

4. Soit c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement l'endomorphisme c.

Nous nous intéressons, dans cet exercice, à des matrices orthogonales d'ordre 3 ou, ce qui revient au même, à des isométries de $\mathbb{R}^3$. Leur étude se mène selon un schéma précis que nous rappelons ici. Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$ et notons f l'endomorphisme dont c'est la matrice dans la base canonique. Dans un premier temps, on calcule le déterminant de M. On trouve nécessairement 1 ou – 1, mais le signe est important.

Si $\det(M) = 1$, alors l'endomorphisme f est une rotation de $\mathbb{R}^3$. Son axe D est déterminé par

$$D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}).$$

Notons θ l'angle de la rotation. Nous avons

$$1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M),$$

ce qui suffit à déterminer l'angle au signe près. Il est impossible d'être plus précis si l'axe D de la rotation n'est pas orienté.

Supposons, à présent, que la droite D soit orientée. Cela signifie que l'on s'est donné un vecteur normé u de D tel que la famille (u) forme une base orthonormée directe de D. Soit (v,w) une base orthonormée du plan $D^\perp$ de la rotation tel que la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Cette écriture nous permet de déterminer exactement l'angle θ.

Si $\det(M) = -1$, alors l'endomorphisme f est la composée d'une rotation d'axe D et d'angle θ et de la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$. Cette rotation et cette réflexion commutent. L'axe D de la rotation est déterminé par

$$D = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}).$$

L'angle θ de la rotation vérifie

$$-1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M),$$

ce qui suffit à déterminer l'angle au signe près.

Un cas particulier est celui de la réflexion. Il correspond au cas où la rotation est l'identité, autrement dit, au cas où $\theta = 0$ et donc

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M) = -1 + 2\cos(0) = 1.$$

Dans les autres cas, comme précédemment, il est impossible de déterminer exactement l'angle θ si l'axe D n'est pas orienté.

Supposons, à présent, que la droite D soit orientée. Soient (u) une base orthonormée directe de D et (v,w) une base orthonormée de $D^\perp$ telles que la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Cette écriture nous permet de déterminer exactement l'angle θ.

Nous allons appliquer ces méthodes pour étudier les endomorphismes a, b et c de l'énoncé.

1. Ce résultat est classique. On peut l'utiliser sans justifier au cours d'un exercice, mais on nous demande ici de le redémontrer. Pour cela, il suffit de revenir à la définition de la rotation et à calculer la quantité demandée.

Soit (v,w) une base de $D^{\perp}$ tel que la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, on a

$$M_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Nous allons commencer par calculer la quantité $\det_{\mathcal{B}}(u',r(u'),u)$, la base $\mathcal{B}$ étant mieux adaptée au problème que la base $\mathcal{C}$.

Il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u' = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Puisque $u' \notin D$, on a $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u',r(u'),u) &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \beta & \beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta) & 0 \\ \gamma & \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \beta(\beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta)) - \gamma(\beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta)) \\ &= (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta). \end{aligned}$$

Nous allons, à présent, utiliser la formule de changement de base pour calculer la quantité demandée.

D'après la formule de changement de base, on a

$$\det_{\mathcal{C}}(u',r(u'),u) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(u',r(u'),u).$$

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée et directe, on a $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = 1$. On en déduit que

$$\det_{\mathcal{C}}(u',r(u'),u) = (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta).$$

Puisque $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$, nous avons $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ et les quantités $\det_{\mathcal{C}}(u',r(u'),u)$ et $\sin(\theta)$ ont donc même signe strict.

Nous allons, à présent, reprendre le raisonnement précédent en remplaçant la rotation r par sa composée s avec la réflexion par rapport à $D^{\perp}$.

Intéressons-nous, à présent, à la composée s de la rotation r et de la réflexion par rapport à $D^{\perp}$. Dans la base $\mathcal{B}$ considérée précédemment, on a

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u', s(u'), u) &= \begin{vmatrix} \alpha & -\alpha & 1 \\ \beta & \beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta) & 0 \\ \gamma & \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \beta(\beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta)) - \gamma(\beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta)) \\ &= (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta). \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que

$$\det_{\mathcal{C}}(u', s(u'), u) = (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta)$$

et donc que $\det_{\mathcal{C}}(u', s(u'), u)$ et $\sin(\theta)$ ont même signe strict.

2. Orthogonalité

Dans un premier temps, nous allons montrer que la matrice A est orthogonale.

On a

$$\begin{aligned} A\,{}^tA &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice A est orthogonale.

Appliquons, à présent, la méthode présentée plus haut.

Déterminant

Calculons le déterminant de A. On a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 + \sqrt{2}L_3 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

On en déduit que a est la composée d'une rotation d'axe D et de la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$.

Axe de la rotation

L'axe D de la rotation est donné par

$$D = \mathrm{Ker}(a + \mathrm{Id}).$$

On a

$$A + \mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $D = \mathrm{Ker}(a + \mathrm{Id})$ est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} 4x + \sqrt{6}y + \sqrt{2}z &= 0 \\ \sqrt{6}x + 3y - \sqrt{3}z &= 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y + 5z &= 0 \end{cases},$$

ou encore, en effectuant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - \sqrt{6}/4L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - \sqrt{2}/4L_1$,

$$\begin{cases} 4x + \sqrt{6}y + \sqrt{2}z &= 0 \\ \dfrac{3}{2}y - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}z &= 0 \\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}y + \dfrac{9}{2}z &= 0 \end{cases}$$

et, finalement,

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + z &= 0 \\ y - \sqrt{3}z &= 0 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$D = \mathrm{Vect}\Big((-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1)\Big).$$

Angle de la rotation

De plus, l'angle θ de cette rotation vérifie

$$-1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(A) = 1.$$

On en déduit que $\cos(\theta) = 1$ et donc que

$$\theta = 0 \bmod 2\pi.$$

Conclusion

Par conséquent, la rotation que l'on considère n'est autre que l'identité. On en déduit que l'isométrie a est la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$.

3. Orthogonalité

Dans un premier temps, nous allons montrer que la matrice B est orthogonale.

On a

$$\begin{aligned} B\,{}^tB &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice B est orthogonale.

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à appliquer la méthode présentée plus haut.

Déterminant

Calculons le déterminant de B. On a

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \\
&= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que b est une rotation.

Axe de la rotation

L'axe D de cette rotation est donné par

$$D = \mathrm{Ker}(b - \mathrm{Id}).$$

On a

$$B - \mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $D = \mathrm{Ker}(b - \mathrm{Id})$ est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$D = \mathrm{Vect}\left((0,1,-1)\right).$$

Angle de la rotation

De plus, l'angle θ de cette rotation vérifie

$$1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(B) = \frac{5}{3}.$$

On en déduit que $\cos(\theta) = 1/3$ et donc que

$$\theta = \pm \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Orientation de l'axe de la rotation

Afin de déterminer complètement l'angle, nous devons choisir une orientation de l'axe D. Cela revient à choisir une base orthonormée de D et à décréter qu'elle est directe. C'est à nous de prendre cette initiative afin de répondre complètement à l'exercice.

Orientons l'axe D. Nous choisissons la famille

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1)\right)$$

comme base orthonormée directe de D.

Détermination exacte de l'angle de la rotation

Nous pouvons, à présent, déterminer complètement l'angle θ.

• Première méthode

Une première méthode consiste à revenir à la définition. Si (v,w) est une base orthonormée de $D^{\perp}$ telle que la famille (u,v,w) soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice de r dans la base (u,v,w) a pour expression

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Nous connaissons alors $\sin(\theta)$, ce qui nous suffit pour déterminer le signe de θ. Commençons par mettre en œuvre cette première méthode.

Posons

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(0,1,-1).$$

Le vecteur

$$v = (1,0,0)$$

est orthogonal au vecteur u et de norme 1. C'est donc, en particulier, un vecteur de $D^{\perp}$. Posons

$$w = u \wedge v = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(0,-1,-1).$$

Ce vecteur est orthogonal au vecteur u et de norme 1. C'est donc un vecteur de $D^{\perp}$. Puisque les vecteurs v et w sont orthogonaux et de norme 1, la famille (u,v) forme une base orthonormée de $D^{\perp}$. En outre, d'après les propriétés du produit vectoriel, la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Calculons la matrice de la rotation b dans la base $\mathcal{B}$. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. On a

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la matrice d'une base orthonormée dans une autre. Elle est donc orthogonale. On en déduit que

$$P^{-1} = {}^tP.$$

D'après la formule de changement de base, la matrice de la rotation b dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = P^{-1}\,B\,P = {}^tP\,B\,P.$$

Tous calculs faits, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\sin(\theta) = -2\sqrt{2}/3$. Nous avons donc $\sin(\theta) < 0$, d'où l'on tire

$$\theta \in \,]-\pi,0[\bmod 2\pi.$$

Par définition, la fonction Arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$. On en déduit finalement que

$$\theta = -\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).$$

• Seconde méthode

Présentons, à présent, une deuxième méthode basée sur la première question de cet exercice. Elle nous propose une façon rapide de déterminer le signe de $\sin(\theta)$.

Posons

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1).$$

Le vecteur

$$u' = (1,0,0)$$

n'appartient pas à D. Nous avons

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(u',b(u'),u) &= \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} < 0. \end{aligned}$$

D'après la première question, nous avons donc

$$\sin(\theta) < 0.$$

On en déduit que

$$\theta \in \,]-\pi,0[\bmod 2\pi.$$

Par définition, la fonction Arccos est à valeurs dans $[0,\pi[$. On en déduit finalement que

$$\theta = -\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Conclusion

L'application b est la rotation d'axe $D = \text{Vect}((0,1,-1))$ et d'angle $\theta = -\text{Arccos}(1/3)$.

4. Nous allons appliquer le même raisonnement que précédemment à la matrice C.

Orthogonalité

On a

$$C\,{}^tC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice C est orthogonale.

Déterminant

Calculons, à présent, le déterminant de C. On a

$$\det(C) = \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

On en déduit que l'isométrie c est la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de cette rotation.

Axe de la rotation

L'axe D de la rotation est donné par

$$D = \text{Ker}(c + \text{Id}).$$

On a

$$C + \text{I}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $D = \text{Ker}(c + \text{Id})$ est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} 5x+3y+4z &= 0 \\ 5x+5y &= 0 \\ -4y+8z &= 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ -y+2z &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que

$$D = \text{Vect}\left((-2,2,1)\right).$$

Angle de la rotation

Nous savons également que l'angle θ de la rotation vérifie

$$-1+2\cos(\theta) = \text{tr}(C) = \frac{3}{5}.$$

On en déduit que $\cos(\theta) = 4/5$ et donc que

$$\theta = \pm\text{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right).$$

Orientation de l'axe de la rotation

Orientons, à présent, l'axe D. Nous choisissons la famille

$$\left(u = \frac{1}{3}(-2,2,1)\right)$$

comme base orthonormée directe de D.

Détermination exacte de l'angle de la rotation

Le vecteur

$$u' = (1,0,0)$$

n'appartient pas à l'axe D. Nous avons

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(u',c(u'),u) &= \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{15} > 0. \end{aligned}$$

D'après la première question, nous avons donc $\sin(\theta) > 0$. On en déduit que

$$\theta \in \left]0,\pi\right[\bmod 2\pi.$$

Par définition, la fonction Arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$. On en déduit finalement que

$$\theta = \mathrm{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right).$$

Conclusion

L'application c est la composée de la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}((-2,2,1))$ et d'angle $\theta = \mathrm{Arccos}(4/5)$ et de la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$.

Exercice 16.3 : Orthonormalisation dans $\mathbb{R}^3$ (sauf PTSI)

Dans les questions qui suivent, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sera muni du produit scalaire usuel que nous noterons $\langle .,. \rangle$.

Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Orthonormaliser la famille (u_1,u_2,u_3) par la méthode de Gram-Schmidt.

2. Notons $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Soit p la projection orthogonale sur E. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit s la réflexion par rapport à E. Exprimer s en fonction de p. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans cet exercice, on cherche à faire des calculs explicites d'orthonormalisation par la méthode de Gram-Schmidt. Rappelons-en le fonctionnement. On part d'un espace vectoriel F muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et d'une famille libre $(u_1,\ldots,u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, de F. Nous savons alors qu'il existe une unique famille orthonormée $(w_1,\ldots,w_n)$ de F vérifiant les deux propriétés suivantes : quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

– $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_i) = \mathrm{Vect}(w_1,\ldots,w_i)$;

– $\langle u_i,w_i \rangle > 0$.

La méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt décrit une façon de déterminer la famille $(w_1,\ldots,w_n)$, vecteur après vecteur. Pour le premier vecteur, il suffit de poser

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}\, u_1.$$

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ et supposons avoir construit des vecteurs $(w_1,\ldots,w_{i-1})$ vérifiant les conditions requises. On pose

$$v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_k, w_k \rangle\, w_k.$$

Les trois propriétés suivantes sont alors vérifiées :

– $\forall k \in \{1,\ldots,i-1\}$, $\langle v_i, w_k \rangle = 0$;

– $\text{Vect}(u_1,\ldots,u_i) = \text{Vect}(w_1,\ldots,w_{i-1},v_i)$;

– $\langle u_i, v_i \rangle > 0$.

On pose finalement

$$w_i = \frac{1}{\|v_i\|}\, v_i.$$

La famille $(w_1,\ldots,w_n)$ vérifie alors les propriétés requises.

1. Nous allons appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (u_1,u_2,u_3). Il faut, au préalable, vérifier que cette famille est libre.

Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Pour cela, nous allons calculer son déterminant dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{C}}(u_1,u_2,u_3) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= -21 \neq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

Appliquons, à présent, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Nous avons

$$\|u_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

On pose

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}\, u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\langle u_2, w_1\rangle = \frac{1}{3}(-1+8+2) = 3.$$

On pose

$$v_2 = u_2 - 3w_1 = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\|v_2\|^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9.$$

On pose

$$w_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\langle u_3, w_1\rangle = \frac{1}{3}(2+10+2) = \frac{14}{3}$$

et

$$\langle u_3, w_2\rangle = \frac{1}{3}(-4+10-1) = \frac{5}{3}.$$

On pose

$$v_3 = u_3 - \frac{14}{3}w_1 - \frac{5}{3}w_2 = \frac{7}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\|v_3\|^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \left((2)^2 + 1^2 + (-2)^2\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^2.$$

On pose

$$w_3 = \frac{1}{\|v_3\|}\, v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La famille (w_1,w_2,w_3) est la famille obtenue à partir de la famille (u_1,u_2,u_3) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2. La projection p est, par définition, une projection orthogonale sur l'hyperplan E. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Il existe une méthode simple pour calculer $p(x)$ lorsque l'on connaît un vecteur orthogonal à cet hyperplan. Dans notre cas, nous avons $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$, d'après les propriétés du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et le vecteur w_3 est donc une base de la droite $E^{\perp}$.

Puisque la famille (w_1,w_2,w_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, nous avons

$$x = \langle x,w_1\rangle\, w_1 + \langle x,w_2\rangle\, w_2 + \langle x,w_3\rangle\, w_3.$$

Le vecteur $\langle x,w_1\rangle\, w_1 + \langle x,w_2\rangle\, w_2$ appartient à E et le vecteur $\langle x,w_3\rangle\, w_3$ appartient à $E^{\perp}$. Nous avons donc, par définition de p,

$$\begin{aligned} p(x) &= \langle x,w_1\rangle\, w_1 + \langle x,w_2\rangle\, w_2 \\ &= w - \langle x,w_3\rangle\, w_3. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que pour connaître la projection d'un vecteur sur un hyperplan, il suffit de connaître sa projection sur la droite orthogonale à cet hyperplan.

D'après les propriétés du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, nous avons $E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$. Par conséquent, la famille (w_3) forme une base orthonormée de la droite $E^{\perp}$ orthogonale à cet hyperplan. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^3$, nous avons donc

$$p(x) = x - \langle x,w_3\rangle\, w_3.$$

En appliquant cette formule aux trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous obtenons

$$p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$p\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$p\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice de la projection p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&-2&4\\-2&8&2\\4&2&5\end{pmatrix}.$$

3. On nous demande tout d'abord d'exprimer la réflexion s en fonction de la projection p. C'est un exercice classique pour lequel il suffit de revenir aux définitions.

Soit $x\in\mathbb{R}^3$. Puisque $E\oplus E^{\perp}=\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(y,z)\in E\times E^{\perp}$ tel que l'on ait $x=y+z$. Par définition de p et de s, nous avons

$$p(x)=y \text{ et } s(x)=y-z.$$

Remarquons que nous avons également

$$(\mathrm{Id}-p)(x)=y+z-y=z.$$

On en déduit que

$$s(x)=y-z=p(x)-(\mathrm{Id}-p)(x)=(2p-\mathrm{Id})(x).$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit $x\in\mathbb{R}^3$, nous avons finalement

$$s=2p-\mathrm{Id}.$$

Remarquons que l'égalité obtenue est valable dans tout espace euclidien, pour la réflexion par rapport à n'importe quel sous-espace et la projection orthogonale sur ce même sous-espace.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à appliquer la formule pour déterminer la matrice de la réflexion s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

En passant aux matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s) &= 2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(p) - \mathrm{I}_3 \\ &= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 16.4 : Décomposition RT (sauf PTSI)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices $(R,T) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

– la matrice R est orthogonale ;
– la matrice T est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs ;
– on a l'égalité $M = RT$.

Indication : on pensera à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Cette question en recouvre deux : l'une concernant l'**existence**, l'autre l'**unicité**.

Unicité

Comme souvent, l'unicité est plus simple à démontrer et c'est par elle que nous commencerons. Nous supposerons donc qu'il existe deux décompositions de la matrice M sous la forme voulue et montrerons qu'elles sont égales.

Supposons qu'il existe deux couples de matrices (R_1,T_1) et (R_2,T_2) vérifiant les conditions demandées. En particulier, nous avons

$$M = R_1T_1 = R_2T_2.$$

Remarquons qu'une matrice orthogonale est inversible et que son inverse est une matrice orthogonale. Une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs est également inversible et son inverse est une matrice du même type. Nous avons donc

$$R_2^{-1}R_1 = T_2T_1^{-1}.$$

La matrice $T = T_2 T_1^{-1}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Elle est également orthogonale, car la matrice $R_2^{-1} R_1$ est orthogonale. Par conséquent, nous avons

$$^{t}T = T^{-1}.$$

Or la matrice ^{t}T est triangulaire inférieure et la matrice T^{-1} est triangulaire supérieure. On en déduit que la matrice $^{t}T = T^{-1}$ est diagonale. Par conséquent, la matrice T est également diagonale. Notons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ ses coefficients diagonaux. L'égalité $^{t}T = T^{-1}$ se récrit alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a_i = a_i^{-1}$ et donc $a_i = \pm 1$. Puisque $a_i > 0$, nous avons finalement $a_i = 1$. On en déduit que $T = \mathrm{I}_n$. Puisque $T = R_2^{-1} R_1 = T_2 T_1^{-1}$, nous avons finalement

$$(R_1, T_1) = (R_2, T_2).$$

On en déduit que la décomposition demandée est unique.

Existence

Passons, à présent, à la démonstration de l'existence de la décomposition. L'indication donnée par l'énoncé semble, *a priori*, un peu obscure. En effet, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt s'applique à une base d'un espace vectoriel et aucune ne figure dans l'énoncé. Nous devons donc en faire apparaître. Pour cela, nous allons interpréter les propriétés des matrices en termes d'algèbre linéaire. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$ et considérons une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de vecteurs. Nous savons que la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ exprimés dans la base canonique est inversible si, et seulement si, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. De même, nous savons que cette matrice est orthogonale si, et seulement si, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire usuel.

Reprenons le raisonnement. De la matrice inversible M, nous allons déduire une base de $\mathbb{R}^n$. De cette base, nous déduirons, par le procédé d'orthonormalisation de

Gram-Schmidt une base orthonormée, et donc une matrice orthogonale. Il nous restera à comprendre comment ces deux matrices sont reliées.

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Notons $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de la matrice M, considérées comme des vecteurs exprimés par leurs coordonnées dans la base canonique. Puisque la matrice M est inversible, la famille $\mathcal{F} = (f_1,\ldots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Appliquons-lui le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Il existe une base orthonormée $(g_1,\ldots,g_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions suivantes : quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_i) = \mathrm{Vect}(g_1,\ldots,g_i) \text{ et } \langle f_i, g_i\rangle > 0.$$

Notons R la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $g_1,\ldots,g_n$ exprimés dans la base canonique. Puisque la famille $\mathcal{G} = (g_1,\ldots,g_n)$ est une base orthonormée, la matrice R est orthogonale.

Il nous reste, à présent, à comprendre comment les matrices M et R sont reliées. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice M est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{F}$ et la matrice R la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{G}$. Notons T la matrice de passage de la base $\mathcal{G}$ à la base $\mathcal{F}$. Nous avons alors la relation

$$\begin{aligned} M &= P_{\mathcal{C},\mathcal{F}} \\ &= P_{\mathcal{C},\mathcal{G}} P_{\mathcal{G},\mathcal{F}} \\ &= RT. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice M est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{F}$ et la matrice R la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{G}$. Nous avons donc

$$M = RT,$$

où T désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{G}$ à la base $\mathcal{F}$.

Il nous reste, à présent, à montrer que la matrice T est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. Souvenons-nous que, dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont reliées par la propriété suivante : quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_i) = \mathrm{Vect}(g_1,\ldots,g_i) \text{ et } \langle f_i, g_i\rangle > 0.$$

Ce sont ces propriétés que nous allons devoir traduire en termes matriciels.

Montrons que la matrice T est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. La matrice T est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $f_1,\ldots,f_n$ exprimés dans la base $(g_1,\ldots,g_n)$. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ et considérons la i-ème colonne de la matrice T. Elle est formée des coordonnées $(\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n})$ du vecteur f_i dans la base $(g_1,\ldots,g_n)$. Avec ces notations, nous avons

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} g_j.$$

D'après les propriétés du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, nous avons

$$f_i \in \mathrm{Vect}(g_1,\ldots,g_i).$$

On en déduit que $\alpha_{i,i+1} = \ldots = \alpha_{i,n} = 0$. Puisque la base $(g_1,\ldots,g_n)$ est orthonormée, nous avons

$$\alpha_{i,i} = \langle f_i, g_i \rangle.$$

D'après les propriétés du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, nous avons donc

$$\alpha_{i,i} > 0.$$

Finalement, la matrice T s'écrit sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \ldots & \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n,1} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n,2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Elle est bien triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Finalement, nous avons bien montré que la matrice M peut s'écrire sous la forme

$$M = RT,$$

où R est une matrice orthogonale et T une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Exercice 16.5 : Espace euclidien de polynômes (sauf PTSI)

Définissons une application $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'application $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

3. Calculer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Rappelons qu'un produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire symétrique définie positive. Le caractère bilinéaire et symétrique est aisé à démontrer.

Linéarité par rapport à la première variable

Montrons que l'application $\langle .,. \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Quels que soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle P + Q, R \rangle &= \int_{-1}^{1} (P(t) + Q(t))R(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (P(t)R(t) + Q(t)R(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\mathrm{d}t \\
&= \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle.
\end{aligned}$$

Quel que soient $P, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P, R \rangle &= \int_{-1}^{1} \lambda P(t)R(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \langle P, R \rangle.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\langle .,. \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

Symétrie

Montrons, à présent, que l'application $\langle .,. \rangle$ est symétrique. Quels que soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} Q(t)P(t))\mathrm{d}t \\ &= \langle Q, P \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\langle .,. \rangle$ est symétrique. On en déduit que l'application $\langle .,. \rangle$ est également linéaire par rapport à la seconde variable.

Positivité

Le caractère positif de l'application $\langle .,. \rangle$ est également facile à démontrer.

Montrons que l'application $\langle .,. \rangle$ est positive. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Nous avons

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive sur l'intervalle $[-1, 1]$. Par conséquent, son intégrale sur cet intervalle est encore positive. Autrement dit, nous avons

$$\langle P, P \rangle \geqslant 0.$$

Par conséquent, l'application $\langle .,. \rangle$ est positive.

Caractère défini positif

Le caractère défini positif de l'application $\langle .,. \rangle$ est plus difficile à démontrer. Cependant, c'est un résultat classique dont il est impératif de connaître la preuve.

Montrons que l'application $\langle .,. \rangle$ est définie positive. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Puisque son intégrale est nulle, cette fonction doit être identiquement nulle sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Il est ici impératif de mentionner le caractère continu de la fonction $t \mapsto P(t)^2$. En effet, il existe des fonctions positives et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$ qui ne sont pas identiquement nulles sur cet intervalle. Un exemple est donné par la fonction

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Par conséquent, quel que soit $t \in [-1,1]$, on a $P(t) = 0$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines. On en déduit que le polynôme P est nul. Par conséquent, l'application $\langle .,. \rangle$ est définie positive. On en déduit finalement que c'est un produit scalaire.

Soulignons que nous ne pouvons pas nous contenter de montrer que la fonction polynomiale P est nulle sur l'intervalle $[-1,1]$. Il manque encore un argument pour montrer que le polynôme P est nul. Considérer ses racines comme nous l'avons fait permet de conclure.

2. Dans cette question, nous allons appliquer le procédé habituel d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Nous aurons à calculer plusieurs produits scalaires entre polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Nous allons donc commencer par calculer les produits scalaires élémentaires $\langle 1,1 \rangle$, $\langle 1,X \rangle$, $\langle 1,X^2 \rangle$, $\langle X,X \rangle$, $\langle X,X^2 \rangle$ et $\langle X^2,X^2 \rangle$.

• Calculons, tout d'abord, quelques produits scalaires élémentaires qui nous seront utiles par la suite. Nous avons

$$\langle 1,1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}t = 2,$$

$$\langle 1,X \rangle = \int_{-1}^{1} t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

(nous pouvions également utiliser le fait que la fonction $t \mapsto t$ est impaire et l'intervalle d'intégration $[-1,1]$ symétrique par rapport à 0),

$$\langle 1,X^2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$\langle X,X \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3},$$

$$\langle X, X^2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \, \mathrm{d}t = 0,$$

car la fonction $t \mapsto t^3$ est impaire, et

$$\langle X^2, X^2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^4 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

- Nous avons

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 2.$$

Par conséquent, nous avons

$$P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Nous avons

$$\langle X, P_0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle X, 1 \rangle = 0.$$

Posons

$$Q_1 = X - \langle X, P_0 \rangle P_0 = X.$$

Nous avons

$$\|Q_1\|^2 = \langle X, X \rangle = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent, nous avons

$$P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X = \frac{\sqrt{6}}{2} X.$$

- Nous avons

$$\langle X^2, P_1 \rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} \langle X^2, X \rangle = 0$$

et

$$\langle X^2, P_0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle X^2, 1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Posons

$$Q_2 = X^2 - \langle X^2, P_1\rangle P_1 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|Q_2\|^2 &= \|X^2\|^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \|1\|^2 - 2\frac{1}{3}\langle X^2, 1\rangle \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{45}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{Q_2}{\|Q_2\|} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{10}}{4}\left(3X^2 - 1\right).\end{aligned}$$

3. Rappelons comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace. Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et x un point de E. Nous noterons p_F et $p_{F^\perp}$ les projections orthogonales sur les espaces F et $F^\perp$.

Par définition, la distance de x à F est

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\}.$$

Cette distance est atteinte au point $y = p_F(x)$ et seulement en ce point. Nous avons donc

$$\begin{aligned}d(x, F)^2 &= \|x - p_F(x)\|^2 \\ &= \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2.\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore : puisque les vecteurs $p_F(x)$ et $p_{F^\perp}(x)$ sont orthogonaux, nous avons

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2.$$

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à appliquer ces formules.

• Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$. La distance d de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ satisfait alors l'égalité

$$d^2 = \left\|X^3\right\|^2 - \left\|p(X^3)\right\|^2.$$

• Calculons $p(X^3)$. Puisque (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, nous avons

$$p(X^3) = \langle X^3, P_0\rangle P_0 + \langle X^3, P_1\rangle P_1 + \langle X^3, P_2\rangle P_2$$

et donc

$$\left\|p(X^3)\right\|^2 = \langle X^3, P_0\rangle^2 + \langle X^3, P_1\rangle^2 + \langle X^3, P_2\rangle^2.$$

• Calculons les produits scalaires précédents. Nous avons

$$\langle X^3, P_0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t = 0,$$

car la fonction $t \mapsto t^3$ est impaire et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0.
Pour les mêmes raisons, nous avons

$$\langle X^3, P_2\rangle = \frac{\sqrt{10}}{4}\int_{-1}^{1}(3t^5 - t^3)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Nous avons également

$$\langle X^3, P_1\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{6}}{5}.$$

• Calculons $\|X^3\|^2$. Nous avons

$$\|X^3\|^2 = \langle X^3, X^3\rangle = \int_{-1}^{1} t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{7}.$$

• Finalement, la distance d de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ vérifie

$$d^2 = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}.$$

On en déduit que

$$d = \frac{2\sqrt{14}}{35}.$$

Index

S

T

V